Lectures in
Complex Analysis-Mathematics department-Fourth stage

أعـداد

أ.د. عبد الرحمن سلمان جمعة

Prof. Dr. Abdul Rahman Salman Juma

٢٠١٧ م **١٤٣٩هـ**

جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جهاز الاشراف والتقويم العلمي

بسم الله الرحمن الرحيم

اسم الجامعة:الانبار

اسم الكلية: التربية للعلوم الصرفة

اسم القسم:الرياضيات

المرحلة:الرابعة

اسم المحاضر الثلاثي:ا.د.عبدالرحمن سلمان جمعه

اللقب العلمي:استاذ

المؤهل العلمي:دكتوراه

مكان العمل:جامعة الانبار

استمارة انجاز الخطة التدريسية للمادة

الاسم	د.عبدالرحمن سلمان جمعه
البريد الالكتروني	eps.abdulrahman.juma@uoanbar.edu.iq dr_juma@hotmail.com
اسم المادة	التحليل العقدي ١,٢
مقرر الفصل	التحليل العقدي
اهداف المادة	ان يتعلم الطالب مفهوم العدد العقدي وكيفية تمثيله هندسيا ودراسة خواصه الجبريه بالاضافه الى تمثيله بالشكل القطبي ودراسة خواصه التوبولوجيه وكذالك معرفة الدوال ذات المتغيرات العقدية واهم الاختلاف بينها وبين الدوال الحقيقية والاطلاع على مختلف الدوال الاولية التي تم دراستها في التفاضل والتكامل وتعريف مايقابلها في الدوال العقدية وايجاد التكامل العقدي للدوال التحليلية بالاضافة الى دراسة المتتابعات والمتسلسلات للدالة التحليلية والمقارنه بين خواصها في الدوال الحقيقيه بلأضافة الى نظرية الرواسب والتحويلات الخطية
التفاصيل الاساسية للمادة	الاعداد العقدية، الدوال العقدية ، الدوال الاولية،التكامل العقدي المتتابعات والمتسلسلات،نظرية الرواسب، التحويلات الخطية
الكتب المنهجية	شرشل ، المتغيرات العقدية وتطبيقاتها ، الجزء الثامن التحليل المركب وتطبيقاته
المصادر الخارجية	اساسيات الدوال العقدية،عبدالرحمن سلمان جمعه،ا ٢٠١٧

تقديرات الفصل	الفصل الدراسي	المختبر	الامتحانات اليومية	المشروع	الامتحان النهائي
	٣٠%		١٠%		٦٠%

المفــردات * (Syllabus):

١- الأعداد العقديه (Complex Numbers)

٢- الدوال العقديه (Complex Functions)

٣- الدوال الأوليه (Elementary Functions)

٤- التكامل العقدي (Complex Integral)

٥- المتتابعات والمتسلسلات (Sequences and series)

٦- نظرية الرواسب (Residue Theory)

(المحاضره : الأولى)

الأعداد العقديه (Complex Numbers)

العدد العقدي : يعرف العدد العقدي(المركب) بأنه الزوج المرتب (x,y) ويرمز له عادة بالرمز z
ويكتب بالشكل $z = x + iy$
حيث $i = \sqrt{-1}$ أو $i = (0,1)$ وعليه نسمي x بالجزء الحقيقي للعدد z ويرمز له بالرمز $x = Re\, z$
أما y فيمثل الجزء الخيالي للعدد z ويرمز له بالرمز $y = Im\, z$ وهي أعداد تنتمي إلى حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
أما مجموعة الأعداد العقدية(المركبة) فيرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ ، ويعبر عنها $\mathbb{C} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$

مثال:الاعداد الاتية هي اعداد عقدية($z = 3 - 3i$, $z = 5$, $z = 5 + 6i$, $z = 3i$)

الخواص الجبرية للعدد العقدي

أ - **خاصية الجمع:** لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين معقدين فإن حاصل الجمع يعرف بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} z_1 \mp z_2 &= (x_1 + iy_1) \mp (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

مثال : لتكن $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 1 - i$ فإن

$$z_1 + z_2 = (3 + 3i) + (1 - i) = (3 + 1) + i(3 - 1) = 4 + 2i$$

ب - **خاصية الضرب:** لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين معقدين فإن حاصل الضرب يعرف بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) = z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

مثال : لتكن $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$ فإن

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i)$$

$$= \big(1 \cdot 2 - 2(-1)\big) + i\big(1(-1) + 2(2)\big)$$
$$= (2 + 2) + i(-1 + 4)$$
$$= 4 + 3i$$

ج- خاصية القسمة: لتكن $z_2 = x_2 + iy_2\ , z_1 = x_1 + iy_1$ عددين معقدين فإن حاصل القسمة يعرف بالشكل الآتي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{y_1x_2 + x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}.$$

ملاحظة: الخاصية الابدالية والتجميعية تنطبق على الاعداد العقدية كما في الاعداد الحقيقية.

مثال: لتكن

$z_2 = 2 - 3i\ , z_1 = 4 + i$

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

مـــلاحظـــة:

أ- العنصر المحايد لعملية الجمع هو (٠,٠) أي أن $z = 0$

ب- العنصر المحايد لعملية الضرب هو (١,٠) أي أن $z = 1$

ج- النظير الجمعي للعدد العقدي هو $-(x, y)$ أي أن $-z$

د- النظير الضربي للعدد العقدي هو $z^{-1} = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

هـ - حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ هو حقل غير مرتب

برهان الملاحظة (د) والملاحظة (هـ) تترك تمرين للطالب.

مثال : جد النظير الضربي للعد المعقد

$z = -7 + 5i$

أن النظير الضربي للعدد Z هو

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{-7+5i} = \frac{-7-5i}{(-7+5i)(-7-5i)}$$

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$\therefore Z^{-1} = \frac{-7}{74} - \frac{5}{74}i$$

مرافق العدد المعقد: لتكن $z = x + iy$ ، فإن العدد المرافق (conjugate) للعدد z ويرمز له بالرمز $\overline{z}$ ويعرف كالآتي:

$$\overline{z} = x - iy$$

والقيمة المطلقة (المقياس) للعدد العقدي ويرمز له بالرمز $|z|$ ويعرف $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ويسمى طول العدد ويكافئ الصيغة

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \geq 0$$

مثال: لتكن $z = 3 - i$ فإن $\overline{z} = 3 + i$ وكذلك $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

خواص مرافق ومقياس العدد العقدي

ا – $Im\, z = \frac{z - \overline{z}}{2i} \quad , \quad Re\, z = \frac{z + \overline{z}}{2}$

ب – $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ج – $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

د – $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$

هـ – $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

و – $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$

ي – $|\overline{z}| = |z|$

ت – $\overline{\overline{z}} = z$

برهان ي:

نفرض ان

$$z = x + iy \quad and\ \bar{z} = x - iy$$

$$|\overline{Z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

نظرية. لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فإن

أ – $Im\, z_1 \le |z_1|\,, \;\; Re\, z_1 \le |z_1|$

ب – $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ج – $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

د – $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

البرهان ب:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) \\ &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re\,(\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

من الفرع (أ) يكون لدينا

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\le |z_1|^2 + 2|\overline{z_1}z_2| + |z_2|^2 \\ &\le (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

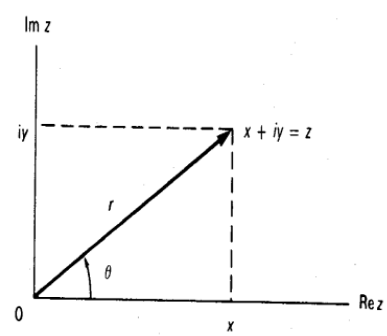
وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نستنتج المطلوب.

(المحاضره : الثانية)

التمثيل الهندسي والصيغة القطبية للعدد العقدي

عند رسم $z = x + iy$ في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ فإن $|z|$ يمثل طول المتجه الواصل بين النقطة (x, y) ونقطة الأصل العدد

$(0,0)$ كما في الشكل



الزاوية θ الظاهرة في الشكل تسمى سعة (argument) العدد العقدي z وتكتب بالشكل $\theta = arg\, z$
وتعرف بأنها الزاوية التي يصنعها العدد العقدي مع محور السينات الموجب.

نلاحظ أن θ غير وحيدة التحديد لأن إذا عوضنا θ بـ $\theta + 2n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ ، فإننا نحصل على نفس النقطة ، بينما تكون وحيدة حين $-\pi < \theta \leq \pi$ عندئذ نطلق عليها القيمة الأساسية للسعة $arg\, z$ ويرمز لها بالرمز $Arg\, z$.

مثال: جد السعة $arg\, z$ والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي $z = 1 + i$

الحل. حسب تعريف السعة θ نجد أن $$arg\, z = \theta = tan^{-1}\frac{y}{x} = tan^{-1}\frac{1}{1}$$

إذن تكون
$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$
$$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

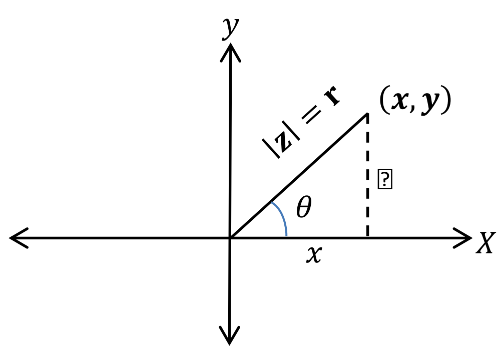
أما القيمة الأساسية لهذه السعة فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ حيث $-\pi < \theta \leq \pi$ أي أن $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$

أما الآن سنوضح الصيغة القطبية(Polar form) للعدد العقدي

لتكن r و θ الإحداثيات القطبية للنقطة (x, y) التي تقابل العدد العقدي الغير صفري $z = x + iy$. من المعروف سابقا أن $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ، كذلك العدد z نستطيع كتابته بالصيغة القطبية وكما يلي

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

حيث $r = |z|$, θ : هي السعة للعدد العقدي z كما نبينه بالشكل



مثال: جد السعة $arg\, z$ والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي
$$z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$$

الحل.

حسب تعريف السعة θ نجد أن
$$arg\, z_1 = tan^{-1}\frac{0}{-2} = \pi$$
$$arg\, z_2 = tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$arg\, z = arg\, z_1 - arg\, z_2$$

إذن تكون
$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

$n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

أما القيمة الأساسية لهذه السعة فهي أصغر قيمة موجبة للسعة θ حيث $-\pi < \theta \le \pi$ أي أن $Arg\ z = \frac{2\pi}{3}$

نظرية:

ليكن z_1, z_2 عددان معقدان فإن

أ. $arg(z_1 z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$

ب. $arg(z_1/z_2) = arg\, z_1 - arg\, z_2$

جـ. $arg(\overline{z_1}) = -\, arg\, z_1$

البرهان. نبرهن الفرع (أ) ونترك الفروع البقية كتمرين للطالب.

برهان (أ) من الصيغة القطبية للعدد العقدي فان

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

حيث θ_2, θ_1 السعة للعددين z_2, z_1 على الترتيب.

وعليه يكون $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(cos\,\theta_1\, cos\,\theta_2 - sin\,\theta_1\, sin\,\theta_2) + i(cos\,\theta_1\, sin\,\theta_2 + sin\,\theta_1\, cos\,\theta_2)$

$$= |z_1||z_2|(cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sin(\theta_1 + \theta_2))$$

لذلك ستكون السعة للعدد العقدي $z_1 z_2$ هي $\theta_1 + \theta_2$

أي أن $arg(z_1 z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$

تعريف

تعرف صيغة أويلر (Euler's formula) بالشكل الآتي:

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\, sin\,\theta$$

حيث θ قيمة حقيقية تقاس بالزاوية النصف القطرية.

لذلك يمكن إعادة تعريف العدد العقدي المعرف بالصيغة (1) بالصيغة الآتية

$$z = re^{i\theta} \qquad (2)$$

مثال: أكتب العدد $\mathrm{z} = -1 - i$ بصيغة أويلر

الحل.

$$\theta = tan^{-1}\frac{-1}{-1} = tan^{-1}\, 1$$
$$= \frac{-3\pi}{4} + 2n\pi \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

لذلك يكون $$-1-i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}+2n\pi\right)}$$

مثال: جد السعة والقيمة الأساسية للسعة واكتب صيغة أويلر للعدد العقدي
$$z=\frac{-2-2i}{\sqrt{3}+i}$$

الحل.

$$\theta_1=tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}+2n\pi$$
$$\theta_2=tan^{-1}\frac{-2}{-2}=\frac{5\pi}{4}+2n\pi$$
$$n=0,\mp1,\mp2,\dots$$
$$arg\,z=\theta=\theta_2-\theta_1$$
$$=\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+2n\pi$$
$$=\frac{13\pi}{12}+2n\pi\ \ ,n=0,\mp1,\mp2,\dots$$

فتكون الصيغة القطبية للعدد

$$z=\frac{|-2-2i|}{|\sqrt{3}+i|}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}+2n\pi\right)}$$
$$z=\ e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+2n\pi\right)}$$

ملاحظة: $Arg(z_1z_2)\neq Arg\,z_1+Arg\,z_2$

مثال: لنأخذ $z_1=2i$, $z_2=-1$ فإن

$$Arg\,z_1=\frac{\pi}{2}\ ,\qquad Arg\,z_2=\pi$$

وعليه يكون $$Arg(z_1z_2)=(-2i)=\frac{-\pi}{2}$$

بينما
$$Arg\, z_1 + Arg\, z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

مثال: جد السعة والقيمة الأساسية للسعة للعدد العقدي $-i$ ثم اكتبه بصيغة أويلر .

الحل.
$$\theta = tan^{-1}\frac{-1}{0} = \frac{-\pi}{2} + 2n\pi \quad ,n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

أما القيمة الأساسية للسعة فهي
$$Arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$$

صيغة اويلر
$$|z| = r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

وعليه يكون
$$z = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+2n\pi\right)} \quad ,n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

(المحاضره : الثالثة)

التمثيل الهندسي للمجموع والفرق

ليكن العدد $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن $z_1 + z_2$ يمثل نفس الكمية التي نستخدمها لإيجاد محصلة قوتين، كذلك $z_1 - z_2$ نجمع z_1 مع $(-z_2)$ أي $z_1 + (-z_2)$.

ملاحظة:

ا. $|z| = r$ تمثل جميع النقاط الواقعة على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل (x, y) ونصف قطرها r .

ب المعادلة $|z - z_0| = r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة على محيط دائرة مركزها $z_0 = (x_0, y_0)$ ونصف قطرها r.

ج. $|z_1 - z_2|$ تعني البعد بين النقطتين z_1, z_2 .

د. المتراجحة $|z - z_0| \leq r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r .

مثال: إثبت أن $|z-2+i|=3$ تمثل دائرة مركزها $z_0=2-i$ ونصف قطرها 3 .

الحل. بما أن $z=x+iy$ فإنه سيكون لدينا

$$|x+iy-2+i|=3$$
$$|(x-2)+i(y+1)|=3$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2=3$$

بمقارنتها مع معادلة الدائرة فإنه يكون المركز هو $(2,-1)$ وهو العدد العقدي $z_0=2-i$ ونصف القطر هو ٣.

مثال: إثبت أن $|z-2i|=|z+2i|$ تمثل معادلة المحور الحقيقي X

الحل. بما أن $z=x+iy$ فإنه سيكون لدينا

$$|x+iy-2i|=|x+iy+2i|$$
$$x^2+(y-2)^2=x^2+(y+2)^2$$
$$y^2-4y+4=y^2+4y+4$$
$$\Rightarrow 8y=0 \Rightarrow y=0$$

وهذه معادلة المحور الحقيقي X .

قوة العدد العقدي ونظرية ديموفيرا De Moivre's Theorem

ليكن nعدد صحيح موجب فإنه طبقا لحاصل الضرب يكون

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

أما إذا كان n عدد صحيح سالب فإن $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ حيث $z\neq 0$

العلاقة أعلاه صحيحة لكل $n\in\mathbb{Z}$ حيث $(\cos n\theta+i\sin n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ وتسمى هذه الصيغة نظرية ديموافر.

وإذا كان الأس كسر فإن

$$z^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{Arg\,z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{Arg\,z+2k\pi}{n}\right),$$

وهي الصيغة التي تعطينا جميع الجذور النونية للعدد z حيث $k=0,1,\dots,n-1$

مثال: إستخدم علاقة ديموفيرا في حساب $z=\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}$

الحل. نفرض أن $z_1=-1+\sqrt{3}i$

فإن $z_1=2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\cos\theta=\frac{-1}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن θ تقع في الربع الثاني وعليه يكون

$$\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

إذن يكون
$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

وهذا يؤدي
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

وبالتالي يكون
$$z = {z_1}^{12} = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}$$

وحسب علاقة ديموفيرا فإنه

$$z = 2^{12}\left(\cos\frac{24\pi}{3} + i\sin\frac{24\pi}{3}\right)$$
$$= 2^{12}(\cos 8\pi + i\sin 8\pi)$$
$$= 2^{12}(1 + 0i)$$
$$\Longrightarrow z = 2^{12}$$

مثال: جد الجذور الثلاثة الأولى للعدد العقدي $1 + i$

الحل. $r = \sqrt{2}$ وأن $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$z_k = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{3}\right)$$
$$k = 0,1,2$$

إذن عندما $k = 0$ يكون لدينا

$$z_0 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}\right)$$
$$= (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

وعندما $k = 1$ يكون لدينا

$$z_1 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right)$$
$$= (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

وعندما $k = 2$ يكون لدينا

$$z_1 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

(المحاضره : الرابعة)

التبولوجيا للأعداد العقدية

في هذا الفصل سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية التي تتعلق بمجموعات النقط في الفضاء العقدي وأول هذه المفاهيم هو المنحني والذي يعرف بأنه المدى للدالة المستمرة ذات القيم العقدية $z(t)$ المعرفةعلى الفترة المغلقة $[a,b]$بالصيغة $z(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ حيث $a\le t\le b$ وان $x(t),y(t)$ دوال حقيقية مستمرة.

و يكون المنحني املسا Smooth عندما تكون $x(t),y(t)$ دوال قابلة للاشتقاق .

وسنحدد المنحني C بالمعادلة الوسيطية $z(t)=x(t)+iy(t)$ حيث $a\le t\le b$ وأن النقطة $z(a)=\big(x(a),y(a)\big)$ تسمى النقطة الإبتدائية للمنحني بينما $z(b)=\big(x(b),y(b)\big)$ تكون النقطة النهائية للمنحني.

الآن إذا كانت $z_1=x_1+iy_1$, $z_0=x_0+iy_0$ نقطتين فإن الخط الذي يربط z_0 مع z_1 هو $C: z(t)=(x_0+(x_1-x_0)t+i(y_1-y_0)t)$ حيث $0\le t\le 1$

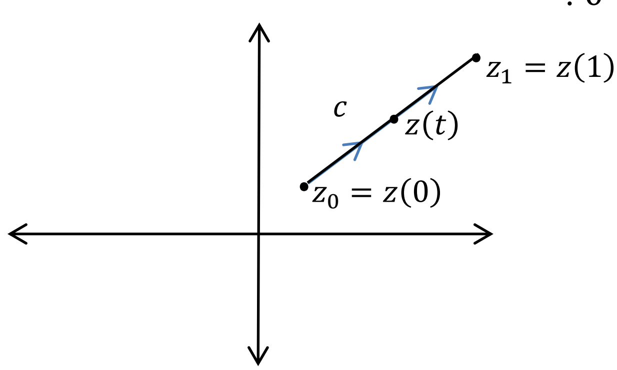
كما موضح بالشكل (١-٤) ويمكن كتابته بالصورة الآتية:

$$C: z(t)=z_0+(z_1-z_0)t,\quad 0\le t\le 1$$

بالنسبة للمنحني $-C$ فإن المعادلة ستأخذ الشكل الآتي:

$$-C: \gamma(t)=z_0+(z_0-z_1)t,\quad 0\le t\le 1$$

ومن هنا نستطيع ألقول أنه إذا كان C منحني معادلته الوسيطية هي $z(t)$ فإن المعادلة الوسيطية للمنحني $-C$ تكون $z(1-t)$, $0\le t\le 1$.



وإذا كانت $z(a)=z(b)$ فان المنحني C يسمى منحني مغلق Closed curve. الان دعنا ندرس المنحني الاتي $x(t)=\sin 2t\cos t$ و $y(t)=\sin 2t\sin t$ حيث $0\le t\le 2\pi$ الذي يمثل وردة بأربعة أوراق

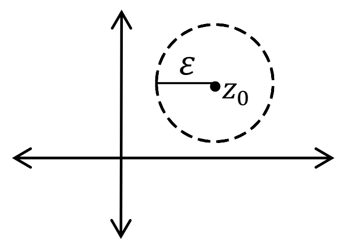
لاحظ أن t تنطلق من ٠ إلى $\frac{\pi}{2}$ النقاط في الورقة (١) ومن $\frac{\pi}{2}$ إلى π في الورقة (٢) وبين π و $\frac{3\pi}{2}$ في الورقة (٣) وأخيراً t بين $\frac{3\pi}{2}$ ، 2π في الورقة (٤).

وكذلك يمكن ملاحظة أن المنحني يقطع نفسه في نقطة الأصل فقط. لذلك نسمي المنحني الذي لا يقطع نفسه بالمنحني البسيط $(Simple)$ والذي يتطلب $z(t_1) \neq z(t_2)$ عندما يكون $t_1 \neq t_2$ باستثناء إحتمالية أن يكون $t_1 = a$ ، $t_2 = b$.

الآن من المواضيع المهمة التي بصدد دراستها في هذا الفصل هي الجوار للنقطة z_0 في المستوي العقدي والتي تعرف بأنها جميع النقاط التي تحقق المتراجحة الآتية

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

وهذه تمثل مجموعة النقاط داخل القرص المفتوح بنصف قطر $\varepsilon > 0$ حول z_0 كما موضح بالشكل



ويرمز له بالرمز $D_\varepsilon(z_0)$ والذي يمثل قرص الوحدة المفتوح مركزه z_0 ونصف قطره $\varepsilon > 0$ وعليه يكون

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$$

وأيضا نستطيع تعريف قرص الوحدة المغلق الذي مركزه z_0 ونصف قطره ε بالصيغة

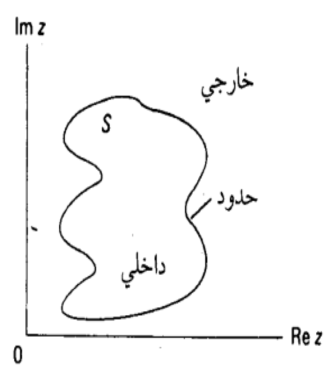
$$\overline{D}_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

والقرص المثقوب بالصيغة

$$D^*_\varepsilon(z_0) = \{z: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D_\varepsilon(z_0)\backslash\{0\}$$

النقطة z_0 تسمى نقطة داخلية (Interior point) للمجموعة S إذا وجد جوار لهذه النقطة يقع باكمله في S وتسمى نقطة خارجية (Exterior point) للمجموعة S إذا وجد جوار للنقطة z_0 تقاطعه مع المجموعة S يكون مجموعة خالية z_0

والنقطة التي لا تكون داخلية ولا خارجية تسمى نقطة حدودية (Boundary point) .



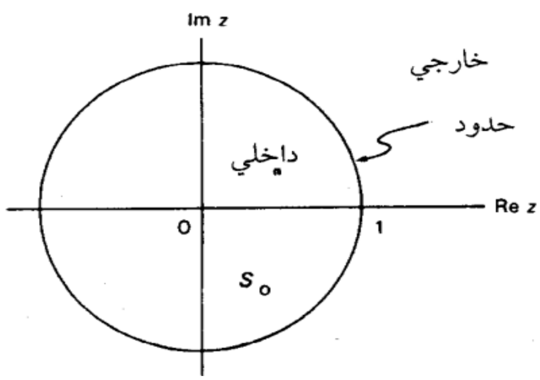
مثال

لنفرض أن S_0 مجموعة النقاط z حيث $|z|<1$. أوجد داخل المجموعة S_0 وخارجها وحدودها؟

الحل

لنفرض أن z_0 أي نقطة من S_0. لاحظ أن القرص $|z-z_0|<\varepsilon$ يقع بكامله داخل S_0 عندما $\varepsilon<1-|z_0|$. إذن كل نقطة من S_0 نقطة داخلية، وبالمثل كل نقطة z_0 تحقق $|z_0|>1$ هي نقطة خارجية إلى S_0. إذا كان $|z_0|=1$، فإن كل جوار ε إلى z_0 سوف يحوي نقاطاً من S_0 ونقاطاً ليست من S_0. إذن حدود المجموعة S هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|z|=1$ ، داخل S_0 هي المجموعة $|z|<1$ ، أما خارج S_0 فهي مجموعة النقاط التي تحقق

$|z|>1$ انظر الشكل التالي:



. . اكتب المعادلة هنا

المجموعة S تسمى مجموعة مفتوحة إذا كان كل نقطة من نقاطها نقطة داخلية وتسمى مغلقة إذا كل نقاطها الحدودية تقع داخل S.

وكذلك S مجموعة متصلة (connected) اذا لكل z_2, z_1 يوجد منحني يصل بينهما يقع بأكمله داخل S.مثال على ذلك تكون
القرص $D=\{z:|z|<a\}$ مجموعة متصلة وأيضا الشكل الحلقي $A=\{z:a<|z|<b\}$ هو أيضا مجموعة متصلة مفتوحة لأن أي نقطتين في Aالمفتوح فإن المنحني الذي يربطهما يقع بأكمله داخله

وعليه نسمي المجموعة المفتوحة المتصلة بإسم المجال (Domain) والمجال مع جميع نقاطه الحدودية يسمى منطقة (Region) ومثال على ذلك الشريط $\{z:1<Im\,z\le 2\}$ والمجموعة التي تشكل من اتحاد المجال والنقاط الحدودية

تسمى منطقة مغلقة ومثال على ذلك نصف المستوي $\{z: x \leq y\}$.

وإذا كانت S^c (متممة المجموعة S) متصلة فإن المجموعة S تكون متصلة اتصالاً بسيطا (Simply connected)
أما إذا كان S^c ليست متصلة فإن S متصلة اتصالاً مضاعفاً (Multiply connected))

<u>مثـــــــــال:</u> إن المجموعة { Z : \ Z \ < 1 } هي مجموعة متصلة.

تسمى نقطة تجمع (Accumulation point) للمجموعة S إذا كان كل جوار للنقطة z_0 يحتوي على الأقل نقطة والنقطة z_0
واحدة من S وعليه تكون المجموعة S مغلقة إذا احتوت على كل نقاط تجمعها.
لاحظ أن نقطة الأصل هي نقطة التجمع الوحيدة للمجموعة $z_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1,2, \dots)$.

مثال: جد نقط التجمع للمجموعة S حيث

$$S = \left\{(-1)^n \cdot \frac{i}{n} : n = 1,2, \dots\right\}$$

الحل. لاحظ أن

$$S = \left\{-i, \frac{1}{3}i, \frac{-4}{3}i, \frac{5}{4}i, \dots\right\}$$

أيضاً يمكن ملاحظة $S = S_1 \cup S_2$ حيث $S_1 = \left\{-i, \frac{-1}{3}i, \frac{-1}{5}i, \dots\right\}$

$$S_2 = \left\{\frac{1}{2}i, \frac{1}{4}i, \frac{1}{6}i, \dots\right\}$$

نلاحظ أن نقاط التجمع للمجموعة S للنقاط الأولى هي $-i$ والثانية i وعليه من التعريف نجد أن نقاط التجمع للمجموعة S هي $\{i, -i\}$.

Homework

١- تحقق من أن

ا- $\left(\sqrt{2}-i\right)-i\left(1-\sqrt{2}i\right)=-2i$

ب - $\sqrt{2}i\,,\ -\sqrt{2}i$ هما جذران للمعادلة $z^2+2=0$

٢- إثبت أن

أ - لأي عدد معقد إذا كان $Im\,z>0$ فإن $Im\left(\frac{1}{z}\right)<0$

ب- لأي عددين معقدين z_2, z_1 فإن $z\,\overline{z}$ عدد حقيقي.

جـ- لأي عدد معقد z فإن $|Re\,z|+|Im\,z|\le\sqrt{2}|z|$.

د – $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2Re(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2$

٣- عبر عن الأعداد التالية بالصيغة القطبية ثم بصيغة أويلر

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{(1-i)^2}\ ,\ 2-3i\,.$$

٤- جد الجذور للأعداد العقدية الآتية

أ. $\left(8-8\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{4}}$ ب. $(-16)^{\frac{1}{4}}$ جـ. $\left(1-\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{5}}$

٥- عبر عن الأعداد العقدية الآتية بالصيغة $x-iy$

أ. $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ب. $e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\pi}$

٦- $|z^2+2z-1|\le 9$ حيث z نقطة تقع على محيط دائرة نصف قطرها ٢ ومركزها نقطة الأصل

٧- إثبت صحة العلاقة الآتية $(-1+i)^7=-8(1+)$

٨- لتكن S مجموعة مفتوحة تحوي النقاط z بحيث $|z|<1$ أو $|z-2|<1$ فهل S متصلة؟ ولماذا؟

٩- جد مجموعة النقاط الحدودية والتجمع للمجموعات الآتية

أ. $S=\left\{\frac{i}{n}:n=1,2,3,\dots\right\}$ ب. $S\{z:Re\,z^2>0\}$

١٠- جد المجموعات الآتية فيما إذا كانت متصلة ، منطقة ، مقيدة

أ. $\{z:Re\,z>1\}$ ب. $\{-1<Im\,z\le 2\}$ جـ. $\{z:|z+2i|>1\}$

١١- برهن على أنه إذا كانت المجموعة تحتوي على كل نقاط تجمعها فإنها مغلقة.

(المحاضره : الخامسة)

الدوال العقدية (Complex functions)

تعريف : الدالة f المعرفة على المجموعة $(S \subset \mathbb{C})$ هي قاعدة الإرتباط الوحيده لكل عدد z من المجموعة S مع العدد العقدي w. المجموعة S تسمى المجال للدالة f والعدد العقدي w هو صورة العدد z بالنسبة للدالة f ومجموعة كل الصور $R = \{v = f(z): z \in S\}$ تسمى مدى الدالة f أو صورة الدالة f .
وكما هو معروف بأن العدد $z = x + iy$ لذلك فأن $w = u + iv$ حيث v, u هما الجزئين الحقيقي والخيالي للعدد w على الترتيب والتي تعتبر دوال حقيقية تعتمد على المتغيرين y, x حيث $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ لذلك تكتب الدالة $f(z)$ بالصورة التالية $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$ وهي دالة ذات قيم معرفة على S .
ومن الجـدير بالذكر هنا بـأنه عند رسم الدالة العقدية فإننـا لا يمـكن أن نتخيل الرسم بسهولة كـما هو معتاد عند رسم الـدوال الحقيقية بل سيعتمد رسمنا للدالة العقدية على وصف تأثير الدالة على مجالها.

مثال: إذا كانت $f(z) = z^2$ فإن

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

وهنا يكون لدينا

$$v(x,y) = 2xy \ ,$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

بينما في الحالة القطبية فإن

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta$$

لذلك يكون

$$v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta \ ,$$

$$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$$

مثال: عبر عن الدالة $f(z) = 8x^2 + i8y^2$ بدلالة المتغيرين $z , \overline{z}$

الحل. بما ان

$$Re\, z = x = \frac{z+\overline{z}}{2} \ , Im\, z = y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

فإن

$$f(z) = 8\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + i8\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2$$

$$= 2z^2 + 4z\overline{z} + 2\overline{z}^2 - i\left(2z^2 - 4z\overline{z} + 2\overline{z}^2\right)$$

$$= (1-i)2z^2 + (4+4i)z\overline{z} + (1-i)2\overline{z}^2$$

الدالة المركبة متعددة القيم (Multiple valued complex function)

يقال للدالة $w = f(z)$ المعرفة على المجال S بأنها دالة معقدة متعددة القيم إذا كان لكل نقطة $z \in S$ يقابلها عدة قيم $w = f(z)$.

مثال: لتكن الدالة $f(z)$ معرفة كالآتي

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{5}}$$

فإنها دالةخماسية القيم لأنه كل عدد $z \in S$ يوجد ثلاثة قيم للمتغير w .

(المحاضره : السادسة)

التحويل الخطي Linear Transformation

لتكن $B = b_1 + ib_2,\ A = be^{i\theta}$ حيث $b > 0$. فإن التحويل $w = f(z) = Az + B$ هو تطبيق تقابلي (شامل ومتباين) من المستوي z الى المستوي w ويسمى التحويل خطي. وهذا التحويل لو أمعنا النظر فيه لوجدنا أنه تركـيب من التدوير والتكبير و الإنتقال وهذا واضح من خلال $\theta = Arg\ A$ كتدوير يتبعها تكبـير بواسطـة $k = |A|$ أما الإنتقال فهو من خلال المتجه $B = b_1 + ib_2$. أما التطبيق العكسي لهذا التطبيق فهو

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$$

والتطبيق f تطبيق متباين وشامل من المستوي z الى المستوي w.

التحويل من نوع $(z^{\frac{1}{2}}, z^2)$

التحويل $w = f(z) = z^2$ نستطيع تمثيله بالأحداثيات القطبية كالآتي $w = f(z) = r^2e^{i2\theta}$ حيث $r > 0$، $-\pi < \theta \le \pi$ فإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية للمستوي w، $w = \rho e^{i\emptyset}$ فإن التحويل $f(z) = z^2$

$$\emptyset = 2\theta \quad , \qquad \rho = r^2$$

أما إذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية فإن التطبيق $w = z^2$ سيكون كالآتي

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$$

لذلك

$$u = x^2 - y^2\ , v = 2xy$$

التحويل $w = z^{\frac{1}{2}}$ ممكن أن نعبر عنه بالصيغة القطبية كالآتي

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad -\pi < \theta \le \pi\ , \qquad r > 0$$

وكذلك إذا استخدمنا $w = \rho e^{i\emptyset}$ في المستوي w فإن التطبيق $w = z^{\frac{1}{2}}$ يكون $\rho = r^{\frac{1}{2}}$, $\emptyset = \frac{\theta}{2}$

وإذا استخدمنا الإحداثيات الكارتيزية سيكون $z = w^2 = u^2 - v^2 + i2uv$

فإن التطبيق $z = w^2$ يعطى بالمعادلات الآتية

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv$$

مثال:

إثبت أن الدالة $f(z) = iz$ تحول الخط $y = x + 2$ إلى $v = -u - 2$

الحل. $u + iv = f(z) = i(x + iy)$

$$= -y + ix$$

لذلك نجد أن

$$u = -y$$
$$v = x$$

بتعويض قيم v, u في المعادلة $y = x + 2$ نستنتج أن

$$-u = v + 2$$

لذلك

$$v = -u - 2$$

مثال: تحت تأثير التحويل $w = iz + i$ بين أن نصف المستوي $x > 0$ يتحول إلى نصف المستوي $v > 0$.

الحل.

$$u + iv = f(z) = i(x + iy) + i$$
$$= ix - y + i$$
$$= i(x + 1) - y = -y + i(x + 1)$$

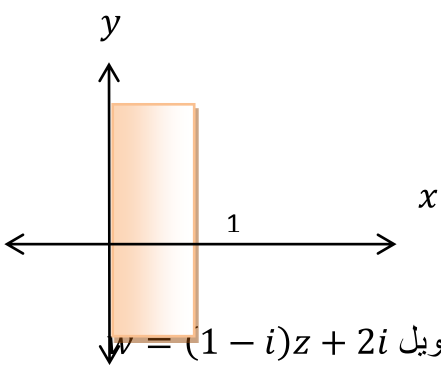
لذلك نجد أن

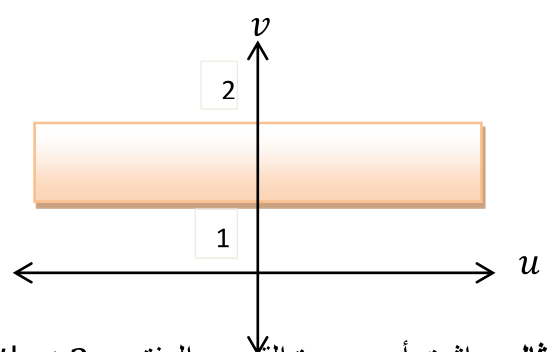
$$u = -y\ , v = x + 1$$

إذن

$$0 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < v < 2$$

وكما موضح بالشكل





مثال: إثبت أن صورة القرص المفتوح $|z - 1 - i| < 2$ تحت تأثير التحويل $w = (1 - i)z + 2i$ هو القرص المفتوح $|w + 2 - 2i| < 4$.

الحل.

التحويل العكسي يعطى بالصيغة الآتية

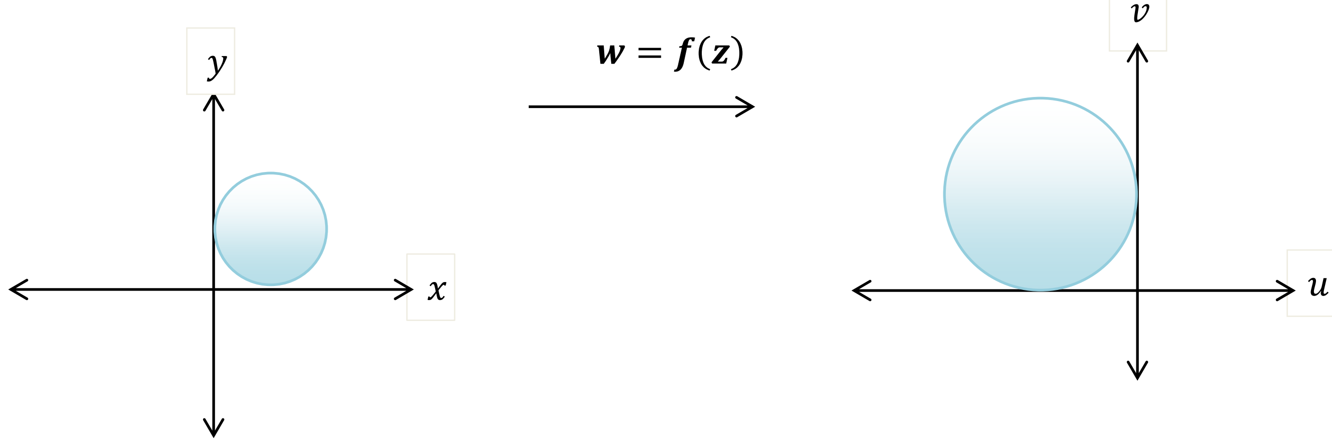
$$z = \frac{w - 2i}{1 - i}$$

وبالتعويض يصبح لدينا

$$\left|\frac{w-2i}{1-i}-1-i\right|<1$$
$$|w-2i-(1+i)(1-i)|<2$$

وبالتبسيط يكون

$$|w+2-2i|<2$$



مثال: أوجد تمثيلاً هندسياً للدالة $w=f(z)$ المعرفة على المجال

$$D=\{z=x+i:0\le x\le 2\}$$

حيث $w=z^2$

الحل. لاحظ أن

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-1)+i(2x)$$
$$=u+iv$$

لذلك $u=x^2-1, \qquad v=2x$

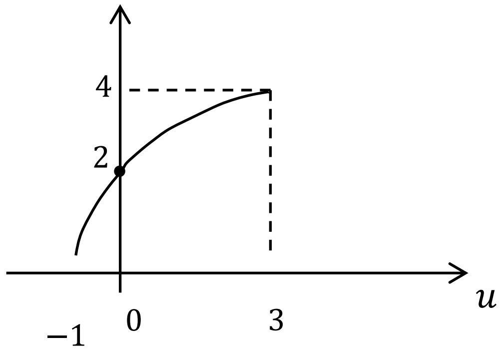
وبالتعويض عن قيمة x نحصل على

$$u=\left(\frac{v}{2}\right)^2-1$$

وهي معادلة قطع مكافئ في المستوي wحيث $-1\le u\le 3$

لأن $u=x^2-1$ وأن $0\le x\le 2$ وأيضاً لدينا $0\le v\le u$

بسبب $v=2x$ وان $0\le x\le 2$. أنظر الشكل (٢-٧) v



الشكل ٢-٧

الغايات والاستمرارية Limit and Continuous

تعريف: لتكن الدالة المركبة f معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة z_0 ماعدا z_0 ذاتها فإن غاية الدالة $f(z)$ عندما z تقترب من z_0 هي العدد w_0 أو بعبارة اخرى

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

وتحليلياً يكون التعريف مكافئ للتعريف الآتي :

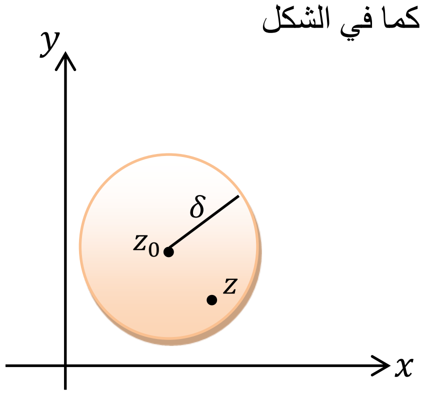
لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث أن

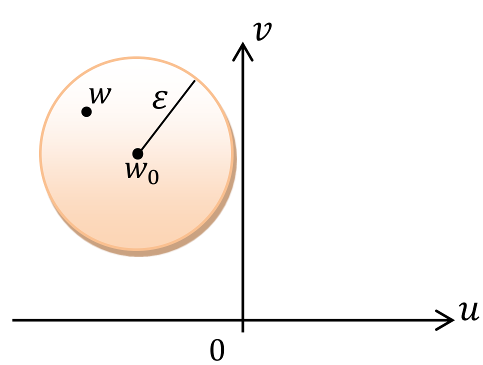
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

متى ما كانت

$$0 < |z - z_0| < \delta.$$

وهندسياً يكون أن لأي جوار ε , $|w - w_0| < \varepsilon$ للنقطة w_0 يوجد جوار لـ δ , $0 < |z - z_0| < \delta$ للنقطة z_0 بحيث أن كل نقطة z التي تكون صورتها w تقع داخل الجوار ε كما في الشكل





وهنا جدير بالذكر أنه عند دراسة الغايات في الدوال المركبة يجب أن يكون لدينا الدقة بالتمييز بينها وبين الدوال الحقيقية أن في الدوال الحقيقية δ يمثل فترة مركزها x_0 ونصف قطرها δ بينما في الدوال المركـــبة فإن الجوار δحيث يمثل الجـــوار

قرص مركزه z_0 ونصف قطـــــره δ وهذا ينطبق على جوار ε في الجملة $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ وهذه الملاحظة تفقد فكرتي النهاية من اليمين واليسار حيث الإقتراب للنقطة x_0 يكون أما من اليمين أو اليسار فقط أما في الدوال المركبة حيث أن الجوار هو قرص مركزه z_0 ونصف قطره δ فإن الإقتراب يكون عبر مسارات لانهائية .

مثال: جد الغاية للدالة $f(z) = \frac{z^2-4}{z-2}$ عندما $z \to 2$ باستخدام التعريف .

الحل . لاحظ أن الدالة غير معرفة عند $z = 2$ لذلك يمكن استخدام فكرة التحليل البسيط كالآتي

$$f(z) = \frac{(z+2)(z-2)}{z-2} = z + 2$$

إذن يكون باعتبار $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon$

يكون $0 < |z - 2| < \delta$

يؤدي إلى $|f(z) - f(z_0)| = |z + 2 - 4| = |z - 2| < \varepsilon$

إذن $\lim_{z\to 2} f(z) = 4$

مثال: إثبت ان $lim_{z\to 2i-1}(2z + 3) = 4i + 1$

الحل . لتكن $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد $\delta > 0$ بحيث يكون $0 < |z - (2i - 1)| < \delta$ يقابل $|2z + 3 - (4i + 1)| < \varepsilon$

الآن نعيد كتابة

$$|2z + 3 - (4i + 1)| = |2z - 4i + 2| < |2(z - (2i - 1))| < |z - (2i - 1)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

نختار $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ فإن في هذه الحالة يكون

$$0 < |z - (2i - 1)| < \delta$$

يؤدي إلى $|2z + 3 - (4i + 1)| < \varepsilon$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{z\to 2i-1}(2z + 3) = 4i + 1$$

مثال: إثبت ان $lim_{z\to i} z^2 = -1$

الحل . لتكن $\varepsilon > 0$ يجب أن نجد $\delta > 0$ بحيث يكون $0 < |z - i| < \delta$ يقابل $|z^2 + 1| < \varepsilon$

الآن نعيد كتابة

$$|z^2 + 1| = |z - i||z + i| < \delta|z + i|$$

إذا اخترنا $\delta < 1$ فإن $|z + i|$ يكون مقيدا بالعدد ٣ وهذا يعني أنه لأي $\delta < max\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$ فإن في هذه الحالة يكون

$$0 < |z - i| < \delta$$

يؤدي إلى $\delta < \varepsilon$ $|z^2 + 1| < \varepsilon$

وهذا يؤدي إلى أن

$$\lim_{z\to i} z^2 = -1$$

مثال: إثبت انه إذا كان

$$f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$$

المعرفة على القرص $|z| < 2$ فإن

$$\lim_{z\to 2} f(z) = i$$

الحل . لاحظ أن العدد ٢ يقع على حدود القرص $|z| < 2$، وأيضاً عندما z تقع في القرص $|z| < 2$ فإن

$$|f(z) - i| = \left|\frac{i\bar{z}}{2} - i\right| = \left|\frac{z-2}{2}\right|$$

لذلك لأي z ، أي عدد $\delta > 0$ فإن

$$|f(z) - i| < \varepsilon$$

عندما يكون

$$0 < |z - 2| < 2\varepsilon$$

لذلك نختار $\delta = 2\varepsilon$ أصغر ما يمكن

مثال: إثبت إن الغاية للدالة $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ عندما $z \to 0$ غير موجودة.

الحل . لبرهنة ذلك دعنا نجد الغاية $z \to 0$ على الاحداثي الحقيقي x والتخيلي y .

في الحالة الأولى لتكن $z = x \in \mathbb{R}$ ، إذن

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\bar{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

في الحالة الثانية لتكن $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ فإن

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{y\to 0} \frac{iy}{iy} = -1$$

لذلك سنحصل على قيمتين مختلفتين للغاية تعتمد على إتجاه التقارب من الصفر لذلك هذا يؤدي إلى ان الغاية غير موجودة

مثال: جد

$$\operatorname{Lim}_{z\to 1+i} \frac{5Z+1}{5Z-i}$$

الحــل

$$\operatorname{Lim}_{z\to 1+i} \frac{5Z+1}{5Z-i} = \left[\frac{\operatorname{Lim}_{z\to 1+i}(5Z) + \operatorname{Lim}_{z\to 1+i} 1}{\operatorname{Lim}_{z\to 1+i}(5Z) + \operatorname{Lim}_{z\to 1+i} i} \right]$$

$$= \frac{5(1+i)+1}{5(1+I)+i} = \frac{6+5i}{5+4i}$$

(المحاضره : السابعة)

تعريف.

عندما تكون النقطة ∞ (المالانهاية) مع حقل الأعداد العقدية عندئذٍ يطلق عليه حقل الأعداد العقدية الموسعة.
وهنا سندرس الغاية ومفهومها للدوال العقدية عندما يقترب المتغير z من المالانهاية (∞) ومن تعريف الغاية سابقاً سنقوم بتغيير بسيط لجوار النقاط z_0 , w_0 بجوارات ∞ والنظرية الآتية ستبين كيف يتم هذا.

نظرية. لتكن z_0 نقطة في المستوي z, w_0 نقطة في المستوي w فأن:

أ. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$

ب. $\lim\limits_{z\to \infty} f(z)=w_0$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{z\to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right)=w_0$

ج. $\lim\limits_{z\to \infty} f(z)=\infty$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}=0$

البرهان . أ. لتكن $lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ لذلك لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$$|f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}$$

عندما $0<|z-z_0|<\delta$

وهذا يعني $w=f(z)$ تقع داخل الجوار $|w|>\frac{1}{\varepsilon}$ للنقطة ∞ متى ما كانت z تقع داخل الجوار

$$0<|z-z_0|<\delta$$

وعليه يكون $\left|\frac{1}{f(z)}-0\right|<\varepsilon$ عندما $0<|z-z_0|<\delta$

لذلك يكون $lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$

ب. لتكن $lim_{z\to \infty} f(z)=w_0$ لذلك لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

عندما $|z| > \frac{1}{\delta}$ يكون $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

ضع $\frac{1}{z}$ محل z لذلك $\left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$

عندما $0 < |z - 0| < \delta$ وهو المطلوب.

الحالات الاخرى تترك تمرين للطالب

مثال: جد قيمة مايلي :

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1}$$

الحل . بما أن $lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz-2} = 0$ لذلك يكون حسب النظرية ٢-١ أعلاه

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1} = \infty$$

مثال: اثبت ان

$$\lim_{z\to 3} \frac{z - 1}{z - 2} = 2$$

الحل

بتبسيط المقدار

$|f(z) - A|$نحصل على

$$|f(z) - A| = \left|\frac{z - 1}{z - 2} - 2\right| = \left|\frac{3 - z}{z - 2}\right| < \frac{\delta}{|z - 2|}$$

حيث افترضنا ان

$0 < |z - 3| < \delta$مع وجوب حساب

δبدلالة ε اذا كان

$\delta < \frac{1}{2}$باستخدامه المتراجحه المثلثيه

$$|z - 2| = |1 - (3 - z)| \geq 1 - |3 - z| > 1 - \delta > \frac{1}{2}$$

عندئذ

$$\left|\frac{z - 1}{z - 2} - 1\right| < 2\delta$$

وعليه اذا كان

$\varepsilon > 0$ معطى نختار

$\delta < min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon)$

فنجد

$$\left|\frac{z-1}{z-2} - 2\right| < \varepsilon$$

مثال: إثبت ان

$$\lim_{z\to\infty} \frac{3z+i}{z+2} = 3$$

الحل .

$$\lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{3}{z}\right)+i}{\left(\frac{1}{z}\right)+2} = \lim_{z\to\infty} \frac{3+iz}{1+2z} = 3$$

لذلك بواسطة النظرية أعلاه يكون

$$\lim_{z\to\infty} \frac{3z+i}{z+2} = 3$$

مثال: إثبت أن $lim_{z\to\infty} \frac{2z^5-1}{z^4+1} = \infty$

الحل .

بما أن

$$\lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{1}{z^4}\right)-1}{\left(\frac{2}{z^5}\right)+1} = \lim_{z\to 0} \frac{z(1-z^4)}{2+z^5} = 0$$

لذلك بواسطة نظرية ٢-١ يكون

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z^5-1}{z^4+1} = \infty$$

نظرية . لتكن $w = f(z) = u + iv$ دالة عقدية حيث w معرف بجوارالنقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ما عدا z_0 ذاتها وليكن $w_0 = u_0 + iv_0$ حيث $u_0 = u_0(x_0, y_0)$, $v_0 = v_0(x_0, y_0)$ عندئذٍ يكون

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

إذا وفقط إذا كان

و
$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x,y) = v_0 \end{cases} \qquad (1)$$

البرهان . نفرض (1) صحيحة لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ بحيث أن

إذا كان $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$ فإن $|u - u_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

و $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2$ فإن $|v - v_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

فإذا فرضنا أن δ أصغر من δ_1 , δ_2 فبما أن

$$|(u+iv) - (u_0 - iv_0)\ | = |(u-u_0) + i(v-v_0)| \le |u-u_0| + |v-v_0|$$

و

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |(x-x_0) + i(y-y_0)| = |(x+iy) - (x_0 + iy_0)|$$

فلذلك إذا كان

$$0 < |(x+iy) - (x_0+iy_0)| < \delta$$

فإن

$$|(u+iv) - (u_0 - iv_0)\ | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا يبرهن أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

ولبرهنة الإتجاه المعاكس نفرض أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

فمن التعريف يكون لدينا أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

ومن تعريف مقياس العدد العقدي فإنه

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \ \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

وبما أن

$$|u(x,y) - w_0| = |Re\ (f(z) - w_0| \le |f(z) - w_0|$$
$$|v(x,y) - w_0| = |Im\ (f(z) - w_0| \le |f(z) - w_0|$$

ومن العلاقتين أعلاه نستنتج أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \implies |u(x,y)-u_0|<\varepsilon,$$
$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \implies |v(x,y)-v_0|<\varepsilon,$$

وهذا مكافئ للعلاقة (1) .

مثال: أوجد نهاية الدالة العقدية

$$f(z)=\frac{x}{x^4+y^4}+i\,\frac{2x^2-yx}{y^4+1}$$

عندما $z\to 1-i$

الحل. من الدالة $f(z)$ نستطيع أن نلاحظ أن

$$u(x,y)=\frac{x}{x^4+y^4}\ ,\ v(x,y)=\frac{2x^2-yx}{y^4+1}$$

لذلك
$$\left.\begin{matrix} x_0=1 \\ y_0=-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow z_0=1-i$$

والآن يكون
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{x}{x^4+y^4}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{2x^2-yx}{y^4+1}=\frac{1}{2}.$$

إذن يكون $u_0=\frac{1}{2}\ ,\qquad v_0=\frac{1}{2}$ وبالتالي حسب النظرية

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0=u_0+iv_0$$
$$\lim_{z\to 1+i} f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

(المحاضره : الثامنة)

نــظريــة. ليكن g, f دالتين لهما نهايتين عند النقطة z_0 فإذا كانت

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = w_0 \quad , \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$$

فإن

1. $\lim_{z \to z_0} [f(z) \mp g(z)] = w_0 \mp w_1$
2. $\lim_{z \to z_0} [f(z)g(z)] = w_0 w_1$
3. $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_1}$

البرهان. يترك تمرين للطالب

الاستمرارية . The continuity

تعريف:

ليكن $f(z)$ دالة عقدية معرفة على المجال D الذي يحوي z_0 ، يقال أن الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 إذا كان

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z)$$

وبعبارة أخرى الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط الآتي :

لكل $\varepsilon > 0$, $z \in D$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$|z - z_0| < \delta$ يؤدي إلى $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

نظريـــة . إذا كان g, f دالتين مستمرتين عند النقطة z_0 التي تنتمي للمجال المشترك D فإن:

أ. الدالة $(\alpha f + \beta g)$ مستمرة عند z_0.

ب. الدالة fg مستمرة في النقطة z_0 .

ج. الدالة f/g مستمرة في النقطة z_0 بشرط $g \neq 0$

البرهان يترك تمرين للطالب.

نظرية. إذاكانت f مستمرة عند النقطة z_0 والدالة g مستمرة عند النقطة $f(z_0)$ فإن $g \circ f$ مستمرة عندالنقطة z_0 .

البرهان . من تعريف الإستمرارية للدالة g عند النقطة $f(z_0)$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$|w - f(z_0)| < \delta_1 \Longrightarrow \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وكذلك بما أن f مستمرة عند النقطة z_0 فإنه لكل $\varepsilon_1 > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1$$

وبفرض ان $w = f(z)$، $\delta_1 = \varepsilon_1$ نستنتج أن

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 \Longrightarrow \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وبهذا أثبتنا أن $g \circ f$ مستمرة عند النقطة z_0 .

وهنا من الجدير بالملاحظة أننا نقول للدالة $f(z)$ مستمرة في النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ إذا كان $u(x,y)\ , v(x,y)$ مستمرة عند (x_0, y_0)

مثال: الدالة الآتية $f = sin\, x + ie^{2xy}$ مستمرة وذلك لأن $u(x,y) = sin\, x$ مستمرة ، $v(x,y) = e^{2xy}$ مستمرة لجميع قيم x, y الحقيقية.

ملاحظـة: إذا كانت f مستمرة على المجال D فهي تكون بالضرورة مستمرة عند x باعتبار y ثابت وكذلك مستمرة عند y باعتبار x ثابت، والعكس غير صحيح أي أن الإستمرارية للمتغير x عند z_0 وكذلك للمتغير y عند z_0 لايؤدي بالضرورة إلى الإستمرارية بالنسبة للمتغير z عند z_0 وفيا يلي مثال يوضح هذه الحالة.

مثال: لتكن

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 - y^2} & , \ z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

غير موجود وكذلك العكس نجد أن

فإذا فرضنا أن الدالة بالنسبة إلى x باعتبار y

$$f\big(x+i(0)\big)=\varphi(x)=\frac{0\cdot(2x)}{x^2}=0 \qquad ,x\neq 0$$

إذا كانت $\varphi(x)$ مستمرة عند $(0,0)$ حيث

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\varphi(x)=0=f(0)=\varphi(0)$$

وأيضاً بالنسبة إلى y فإن

$$f(0+iy)=\psi(y)=\frac{0\cdot(2y)}{-y^2}=0 \qquad ,y\neq 0$$

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ x\to 0}}\psi(y)=0=f(0)=\varphi(0)$$

أي أن $\psi(y)$ مستمرة عند $(0,0)$

ولكن إذا اعتبرنا أن $z=(x+iy)\to 0$ عن طريق المسار $y=my$

$$f(z)=\frac{2mx^2}{x^2-m^2x^2}=\frac{m}{1-m^2} \quad ,z\neq 0$$

لذلك $lim_{z\to}\,f(z)$ تعتمد على طريقة وصول z إلى الصفر لذلك تكون الغاية غير موجودة وبالتالي $f(z)$ غير مستمرة عند $z\neq 0$.

مثال: افحص استمرارية الدالة التاليه

$$f(z)=\begin{cases} z & ,if\ z\neq i\\ 0 & ,if\ z=i\end{cases}$$

الحـــــل:

1- $f(i)=0$ (exist)

2- $\lim_{z\to i}f(z)=\lim_{z\to i}z^2=-1$

بما ان قيمة الدالة $\neq$ غاية الدالة $\Leftarrow -1\neq 0$

$\therefore$ الدالة غير مستمرة.

مثال: افحص استمرارية الدالة التاليه

$$f(z)=\begin{cases} z+1 & , \ z\le 1 \\ 2 & , z>1 \end{cases}$$

الحل:

1- $f(1) = 2$ (exist)

2- $\lim_{z\to 1^+} f(z) = \lim_{z\to 1^+} z+1 = 1+1 = 2$

$\lim_{z\to 1^-} f(z) = \lim_{z\to 1^-} 2 = 2$

بما ان قيمة الدالة موجودة

وان الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\therefore$ الدالة مستمرة

الإستمرارية المنتظمة Uniform Continuity

تعريف . إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن $|z_1 - z_2| < \delta$ فإن $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ حيث z_2, z_1 أي نقطتين اختياريتين ضمن المجال .

لاحظ في هذا التعريف أن اختيار δ يعتمد على ε فقط ولا يعتمد على z_2, z_1 .

مثال: إثبت أن $f(z) = z^2$ منتظمة الإستمرارية في المنطقة $|z| < 1$. لكنها غير منتظمة الاستمرارية في الحقل C

الحل. ليكن z_2, z_1 أي نقطتين في المجال $|z| < 1$ لذلك إذا كان

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2|$$

$$\le |z_1 - z_2|(|z_1| + |z_2|) < 2|z_1 - z_2| \qquad (|z| < 1)$$

$$|z_1 - z_2| < \delta \rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < 2\delta$$

الآن ليكن $\varepsilon > 0$ فنضع $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ لذلك يكون لدينا

$$|z_1 - z_2| < \delta \rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

وهو المطلوب من النظرية .

مثال: إثبت أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الإستمرارية في المنطقة $0 < |z| < 1$.

الحل. ليكن $\varepsilon > 0$ ولتكن $0 < \delta < 1$ ولتكن z_2, z_1 عددين في المجال $|z| < 1$ حيث $z_1 = \delta$، $z_2 = \frac{\delta}{1+\varepsilon}$ نلاحظ أن

$$|z_1 - z_2| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right| < \delta$$

بينما

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| > \varepsilon$$

لذلك من التعريف نجد أن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ غير منتظمة الإستمرارية في المجال $0 < |z| < 1$.
الآن سنعطي بعض الحقائق المهمة بدون برهان.

(المحاضره : التاسعة)

الدوال القابلة للإشتقاق Differentiable functions

تعريف. لتكن f دالة معقدة معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة z_0، فإن مشتقة الدالة f عند z_0تكتب بالشكل $f'(z_0)$ وتعرف بالمعادلة

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (2)$$

بشرط أن الغاية موجودة.
ونقول الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط أعلاه فإذا وضعنا $\Delta z = z - z_0$ في المعادلة (2) فإن $f'(z_0)$ يمكن إعادة صياغتها بالصورة

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

الآن لتكن $w = f(z)$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ فإن الرمز $\frac{dw}{dz}$ للمشتقة يكون معرفاً كالآتي

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

مثال: لتكن $f(z) = z^4$ إستخدم التعريف لإيجاد $f'(z)$.

الحل .

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^4 - {z_0}^4}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)(z^2 + {z_0}^2)}{z - z_0}$$

$$= 4{z_0}^3$$

وبشكل عام فإن الصيغة النهائية للمشتقة بعد إسقاط z_0 تكون $f'(z) = 4z^3$ ومن الجدير بالذكر هنا أن خواص مشتقات الدوال العقدية هي نفسها خواص مشتقات الدوال الحقيقية بالإضافة عند حساب الغاية فيجب أن ننتبه للقيم العقدية Δz حيث الغاية لهذه القيمة لاتعتمد على مسار $\Delta z \longrightarrow 0$ فإذا وجدنا مسارين مختلفين لهذه الغاية فإن الدالة العقدية تكون غير قابلة للإشتقاق وتوضيح ذلك في المثال الآتي:

مثال: إذا كانت الدالة $f(z) = \overline{z}$ ، اثبت أنها غير قابلة للإشتقاق .

الحل.

ندرس الغاية لمسارين مختلفين للنقطة ، فإذا كان الإقتراب الأول للنقطة z_0 على طول الخط الموازي للمحور الحقيقي فإن $z = x + iy_0$ ، وعليه يكون

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{(x - iy_0) - (x_0 - iy_0)}{(x - x_0) + i(y_0 - y_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

أما إذا كان الإقتراب للنقطة z_0 على طول الخط الموازي للمحور التخيلي y فإن $z = x_0 + iy$ وعليه يكون

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0)\to(x_0+iy_0)} \frac{(x_0-iy)-(x_0-iy_0)}{(x_0-x_0)+i(y-y_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0)\to(x_0+iy_0)} \frac{-i(y-y_0)}{i(y-y_0)} = -1$$

ومن أعلاه نجد أن $f(z) = \overline{z}$ غير قابلة للإشتقاق لإختلاف قيمة الغاية.

مثال: لتكن الدالة العقدية المعرفة بدلالة القيم الحقيقية كالآتي $f(z) = |z|^2$ إثبت أن المشتقة موجودة فقط عند الصفر وليس في أي مكان آخر.

الحل.

$$\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \frac{|z+\Delta\, z|^2 - |z|^2}{\Delta\, z} = \frac{(z+\Delta\, z)(\overline{z}+\overline{\Delta\, z}) - z\overline{z}}{\Delta\, z} \qquad (3)$$

$$= \overline{z} + \overline{\Delta\, z} + z\frac{\overline{\Delta\, z}}{\Delta\, z}$$

وكما في المثال أعلاه وبنفس الإتجاهات إلى النقطة ، يكون لدينا $\overline{\Delta\, z} = \Delta\, z$, $\overline{\Delta\, z} = -\Delta\, z$ على الترتيب

وعليه عندما يكون $\Delta\, z = (\Delta\, x, 0)$ فإن

$$\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \overline{z} + \Delta\, z + z$$

وعندما $\Delta\, z = (0, \Delta\, y)$

$$\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \overline{z} - \Delta\, z - z$$

وهنا إذا كانت الغاية موجودة ووحيدة عندما $\Delta\, z \longrightarrow 0$ فإن

$$\overline{z} + z = \overline{z} - z$$

وعليه فإن $\frac{dw}{dz}$ غير موجودة عند $z \neq 0$ ولإثبات أن $\frac{dw}{dz}$ موجودة فإنه من العبارة (3) $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta\, z}$

وعندما $z = 0$ ونستنتج أن $\frac{dw}{dz}$ موجودة.

بينما هذه الدالة مستمرة عند كل نقاط المستوي لذلك الإستمرارية للدالة عند نقطة لا تؤدي إلى قابلية الإشتقاق للدالة بينما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند نقطة فإنها مستمرة عند تلك النقطة ولبرهنة ذلك نفرض أن $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند z_0 الدالة ونكتب هذا رياضياً كالآتي:

$$\lim_{z\to z_0}\big(f(z) - f(z_0)\big) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \lim_{z\to z_0}(z-z_0)$$

$$= f'(z_0)\cdot 0 = 0$$

ومن هذا نجد أن $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

وهذا تعريف مكافئ للإستمرارية للدالة f عند نقطة z_0.

خواص الدوال القابلة للإشتقاق

نظرية . لتكن كل من g, f دوال قابلة للإشتقاق عند النقطة z ، فإن

1. $(cf(z))' = cf'(z)$
2. $(f \mp g)'(z) = f'(z) \mp g'(z)$
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad , \qquad g(z) \neq 0$
5. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$
6. إذا كانت $f(z) = c$ فإن $f'(z) = 0$
7. إذا كانت $f(z) = z^n$ فإن $f'(z) = nz^{n-1}$

معادلتي كوشي – ريمان Cauchy-Riemann's Equations

في هذا البند نحصل على زوج من المعادلات ذات المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال الحقيقية v, u للدالة العقدية القابلة للإشتقاق عند z_0 والتي تكون بالشكل الآتي:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

وهذا الزوج من المعادلات أكتشف سابقاً من قبل العالم الرياضي الفرنسي A.L. Cauchy والعالم الألماني G.F. Riemann.

ونبدأ بوضع $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

$$= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]$$

لنفرض أن المشتقة $f'(z_0)$ تعطى بالصورة الآتية:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \qquad (4)$$

موجودة ، لذلك يكون لدينا

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z}\right) + i \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z}\right)$$

ومن خلال ما ورد أعلاه فإن $(\Delta\, x, \Delta\, y)$ تذهب إلى $(0,0)$ بأي طريقة نختاره وبصورة خاصة إذا كان الأقتراب إلى $(0,0)$ أفقياً خلال النقطة $(\Delta\, x, 0)$ فإن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تصبح

$$\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \frac{u(x_0 + \Delta\, x, y_0)}{\Delta\, x} + i\frac{v(x_0 + \Delta\, x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta\, x}$$

لذلك

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0 + \Delta\, x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta\, x} = u_x(x_0, y_0)$$

ويكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0 + \Delta\, x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta\, x} = v_x(x_0, y_0)$$

حيث أن v_x, u_x هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير x عند النقطة (x_0, y_0) وبالتعويض في (4) نستنتج أن

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

والآن وبنفس الطريقة بإمكاننا أن ندع $\Delta\, z \longrightarrow 0$ عمودياً خلال النقطة $(0, \Delta\, y)$ فإن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تصبح

$$\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta\, y) - u(x_0, y_0)}{i\,\Delta\, y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \Delta\, y) - v(x_0, y_0)}{i\,\Delta\, y}$$
$$= v(x_0, y_0 + \Delta\, y) - v(x_0, y_0) - i\frac{u(x_0, y_0 + \Delta\, y) - u(x_0, y_0)}{\Delta\, y}$$

لذلك يكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z}\right) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta\, y) - v(x_0, y_0)}{\Delta\, y} = v_y(x_0, y_0)$$

وأيضاً يكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z}\right) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta\, y) - u(x_0, y_0)}{\Delta\, y} = -u_y(x_0, y_0)$$

حيث أن v_y, u_y هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير y عند النقطة (x_0, y_0) وبالتعويض في (4) نستنتج أن

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) + iu_y(x_0, y_0)$$
$$= -i\left[u_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)\right]$$

ومن قيم المشتقة $f'(z_0)$ في كلتا الحالتين نستنتج أن

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\ ,\qquad u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

وهما معادلتي كوشي وريمان (Cauchy-Riemann Equations)
ومن الممكن تلخيص النتائج التي حصلنا عليها أعلاه كالآتي من خلال إعطاء الشرط الضروري لتحقيق معادلتي كوشي ريمان .

(المحاضره : العاشرة)

نظرية.- لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $f'(z_0)$ موجودة عند النقطة $z_0=x_0+iy_0$ فإن المشتقات الجزئية الأولى للدوال v,u موجودة عند النقطة (x_0,y_0) وتحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$u_x=v_y\ ,u_y=-v_x$$

والدالة $f'(z_0)$ يمكن كتابتها بالصورة

$$f'(z_0)=u_x+iv_x$$

مثال : لتكن $f(z)=z^4$ ، إثبت انها تحقق معادلتي كوشي-ريمان .

الحل . نعيد كتابة الدالة القابلة للإشتقاق $f(z)$ بدلالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ لذلك يكون لدينا

$$f(z) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4i(x^3y - xy^3)$$

إذن

$$v(x,y) = 4(x^3y - xy^3), \qquad u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

الآن نجد كل من $v_y \, , v_x \, , u_y \, , u_x$

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2 \, , \qquad v_x = 4(3x^2y - y^3)$$
$$u_y = 4y^3 - 12x^2y, \qquad v_y = 4(x^3 - 3xy^2)$$

نلاحظ أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة حيث أن

$$u_x = v_y$$
$$u_y = v_x$$

الآن نعطي الشرط الكافي لكي تكون الدالة قابلة للإشتقاق من خلال النظرية الاتية حيث أن الدالة التي تحقق كوشي-ريمان ليس بالضرورة أن تكون قابلة للإشتقاق.

نظرية . لتكن الدالة $f(z)$ معرفة كالآتي:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

خلال جوار النقطة $z_0 = (x_0, y_0)$ ونفرض أن

أ. المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u موجودة عند كل نقطة من نقاط الجوار.

ب. المشتقات الجزئية الأولى للدوال v, u أيضاً مستمرة عند (x_0, y_0) وتحقق معادلتي كوشي-ريمان

$$u_x = v_y \, , u_y = -v_x$$

عند (x_0, y_0)،

فإن الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند (x_0, y_0) وقيمة المشتقة عندئذٍ هي

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

البرهان . ليكن الشرطان الأول والثاني متحققان ولتكن $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ حيث $0 < |\Delta z| < \varepsilon$

بالإضافة

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$
$$= \Delta u + i \Delta v$$

حيث

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$
$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

وعليه يكون لدينا

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0) \Delta x + u_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$
$$\Delta v = v_x(x_0, y_0) \Delta x + v_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

حيث $\varepsilon_i \to 0 \quad (i = 1,2,3,4)$

عندما $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)$

بالتعويض عن قيم $\Delta v, \Delta u$ في المعادلة نحصل على

$$\Delta w = u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + i\left[v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y\right]$$

ومن معادلتي كوشي-ريمان حيث

$$u_x = v_y\,, u_y = -v_x$$

لذلك يكون

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ولكن $|\Delta z| > |\Delta y|\,, |\Delta z| > |\Delta y|$ هذا يؤدي الى

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} \le 1, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta z} \le 1$$

ونستنتج أن

$$\left|(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_3|,$$

$$\left|(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4| \le |\varepsilon_2| + |\varepsilon_4|$$

وهذا يعني أن الطرف الأيمن لكلا المتغيرين يذهبان للصفر كما المتغير $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ يقترب من الصفر لذلك تكون الدالة $f'(z_0)$ موجودة.

مثال: **اثبت ان** الدالة $f(z) = e^{2xy}\,[cos(y^2 - x^2) + i\,sin(y^2 - x^2)]$ قابلة للإشتقاق عند كل نقاط z

الحل.

$$u(x, y) = e^{2xy}\,cos(y^2 - x^2)\quad, \qquad v(x, y) = e^{2xy}\,sin(y^2 - x^2)$$

$$u_x = v_y = 2ye^{2xy}\cos(y^2 - x^2) + 2xe^{2xy}\sin(y^2 - x^2)$$

$$u_y = -v_x = 2xe^{2xy}\cos(y^2 - x^2) - 2ye^{2xy}\sin(y^2 - x^2)$$

نستنتج من ذلك أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة بالإضافة إلى $u_x\,, u_y\,, v_x\,, v_y$ جميعها دوال مستمرة لكل قيم (x, y) إن

ولذلك تكون الدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق ولحساب المشتقة نستطيع كتابة

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2e^{2xy}[y\cos(y^2 - x^2) + x\sin(y^2 - x^2)] + 2e^{2xy}[y\sin(y^2 - x^2) + x\cos(y^2 - x^2)]$$

مثال: الدالة $f(z) = x^2 + 2xy \quad + i(y^2 + 2xy)$ قابلة للإشتقاق على النقاط التي تقع على المستقيم $x = -y$ فقط

الحل . لإثبات ذلك نلاحظ أن

$$u(x,y) = x^2 + 2xy \ , \qquad v(x,y) = y^2 + 2xy$$

وبحساب المشتقات الجزئية يكون لدينا

$$u_x(x,y) = 2x + 2y \ , \qquad v_y(x,y) = 2y + 2x$$

$$u_y(x,y) = 2x \ , \qquad v_x(x,y) = 2y$$

المشتقات الجزئية أعلاه مستمرة ومعادلتي كوشي-ريمان تكون متحققة فقط إذا كان $2x = -2y$ أي أن

$$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

وهذا مكافئ إلى أن $x + y = 0$ وعليه تكون كوشي-ريمان متحققة إذا كان $x = -y$ وبناءً على النظرية السابقة فإن f قابلة للإشتقاق فقط عند النقاط التي تقع على المستقيم $x = -y$

معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية

عند استخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) فإن الدالة $f(z)$ تكتب بالصورة الآتية

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

حيث v, u دوال حقيقية والنظرية الآتية توضح لنا كيفية كتابة معادلتي كوشي-ريمان بالشكل القطبي ، وبرهانها يترك كتمرين للطالب.

نظرية . $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ دالة مستمرة معرفة على جوار النقطة $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ فإذا كانت المشتقات لتكن
الجزئية $v_y \,, v_x \,, u_y \,, u_x$ مستمرة عند النقطة (r_0,θ_0) ومعادلتي كوشي-ريمان

$$u_r(r_0,\theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0,\theta_0) \ , \qquad v_r(r_0,\theta_0) = \frac{-1}{r_0} u_\theta(r_0,\theta_0)$$

متحققة فإن الدالة f قابلة للإشتقاق عند z_0 ومشتقتها $f'(z_0)$ تكتب بإحدى الصيغ الآتية

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}[u_r + iv_r]$$

أو

$$f'(z_0) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0}[v_\theta - iu_\theta]$$

مثال : لتكن الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ حيث $z \neq 0$ أكتب $f(z)$ بإستخدام معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية وإثبت أنها قابلة للإشتقاق لكل قيم z الغير صفرية.

الحل .

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (z \neq 0)$$

بما أن
$$u(r,\theta)=\frac{\cos\theta}{r}\ ,\qquad v(r,\theta)=\frac{-i\sin\theta}{r}$$
الآن نكتب معادلتي كوشي-ريمان بالصيغة القطبية كالآتي:
$$ru_r=-\frac{\cos\theta}{r}=v_\theta\ ,\quad u_\theta=\frac{-i\sin\theta}{r}=-rv_r$$
وبما أنها متحققة ، لذلك فالدالة $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند $z\neq 0$ وبالإعتماد على النظرية السابقة نجد أن
$$f'(z)=-e^{i\theta}\frac{e^{-i\theta}}{r^2}=\frac{-1}{(re^{i\theta})^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

(المحاضره: الحادية عشر)

الدوال التحليلية Analytic Functions

تعريف. الدالة العقدية $f(z)$ يقال انها دالة تحليلية(هلومرفية) عند النقطة $z_0\in D$ إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل نقاط

جوارما للنقطة z_0 وإذا كانت تحليلية عند كل نقاط المنطقة D فإنها تكون تحليلية ضمن المنطقة D.
وإذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المستوي z فإنها يقال عليها دالة كلية **(Entire Function)**.

مثال: الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلية عند كل نقطة غير صفرية في المستوي المنتهي بينما الدالة $f(z) = |z|^2$ ليست تحليلية عند كل نقطة لأن مشتقتها موجودة فقط عندما $z = 0$ وليس في أي مكان آخر.
الان إعطاء تعريفا حيث أن $f(z)$ إذا كانت ليست تحليلية عند النقطة z_0 ولكنها تحليلية عند بعض نقاط أي جوار للنقطة z_0 عندئذٍ تسمى النقطة z_0 نقطة شاذة **(Singular Point)**الدالة .

مثال ٣٣:

جد النقاط الشاذة للدالة

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

<u>الحل</u>

بما أن

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

أذاً الدالة تحليلية لجميع قيم z عدا $z = 1$ وهي النقطة التي عندها تكون المشتقة غير موجودة

، ان النقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة .

نظرية. $f(z)$ تكون دالة تحليلية في مجال D إذا وفقط إذا كان الجزء الحقيقي والتخيلي من $f(z)$ لهما مشتقات جزئية مستمرة من الرتبة الأولى وتحقق معادلتي كوشي-ريمان عند جميع نقاط D.

مثال ٣٤ :

برهن أن الدالة $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$ كلية (أي تحليلية في جميع نقاط المستوي) .

الحل/بما ان $z = x + iy$ فأن

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 5y + 3) + i\,(2xy + 5x - 1)$$

أي أن

$$u = x^2 - y^2 - 5y + 3$$

$$v = 2xy + 5x - 1$$

$$u_x = 2x = v_y$$

$$v_x = 2y + 5 = -u_y$$

فالمعادلتين لكوشي ريمان متحققتان ولما كانت المشتقات الجزئية للدالتين u , v مستمرة عندئذ تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد وأن

$$f'(z) = 2x + i\,(2y + 5)$$

$$= 2z + 5i$$

وبذلك تكون الدالة $f(z)$ كلية .

مثال ٣٥: إثبت أن الدالة $f(z) = e^y \cos x - ie^y \sin x$ دالة كلية.

الحل . نجد المشتقات الجزئية للدالتين

$$u_x = -e^y \sin x \quad , \qquad u_y = e^y \cos x$$

$$v_y = -e^y \sin x \;, \qquad v_x = -e^y \sin x$$

وهذه الدوال الحقيقية مستمرة لكل قيم z بالإضافة إلى انها تحقق معادلتي كوشي-ريمان عند كل نقاط المستوي وبالتالي تكون تحليلية عند كل نقط المستوي لذلك فهي دالة كلية .

مثال :

وضح أن الدالة :

$$f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$$

تكون كلية.

الحل

يجب أن نختبر أولا اتصال المشتقات الجزئية :

$$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy \quad \text{و} \quad u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

وتحقق معادلتي كوشي - ريمان عند جميع نقاط C من الواضح أن :

$$u_x=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy)=v_y$$

وأن

$$-u_y=2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy+x\sin 2xy)=v_x$$

دوال متصلة في C وعليه فإن $f(z)$ كلية.

مثال: حدد النقاط التي تكون الدالة $f(z)$ تحليلية عندها حيث

$$f(z)=\overline{z}e^{-|z|^2}$$

الحل . نعيد كتابة الدالة $f(z)$ كالاتي:

$$f(z)=(x-iy)e^{-(x^2+y^2)}$$

ومنها تكون الدوال الحقيقية v,u كالآتي:

$$u(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}, \quad v(x,y)=-ye^{-(x^2+y^2)}$$

الآن نجد مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى

$$u_x=e^{-(x^2+y^2)}-2x^2e^{-(x^2+y^2)}, \qquad u_y=-2xye^{-(x^2+y^2)}$$

$$v_x=2xye^{-(x^2+y^2)}, \qquad v_y=-e^{-(x^2+y^2)}+2y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

بالنظر إلى قيم المشتقات أعلاه غير أن

$$u_y=-v_x$$

بينما $u_x=v_y$ فقط عندما يكون

$$2e^{-(x^2+y^2)}-2x^2e^{-(x^2+y^2)}-2y^2e^{-(x^2+y^2)}=0$$

أو $$2e^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2)=0$$

لذلك يكون لدينا $x^2+y^2=1$

وبما أن جميع المشتقات الجزئية v_y, u_y, v_x, u_x مستمرة لذلك نستنتج أن $f(z)$ تحليلية فقط على الدائرة $|z|=1$

مثال:

صف المنطقة التي تكون عندها الدالة f تحليلية :

$$f(x)=\frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$$

الحل

المشتقات الجزئية الأولى لكل من $u=\operatorname{Re} f$ و $v=\operatorname{Im} f$ تحقق :

$$u_x=\frac{y^2-(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}=v_y$$

$$u_y=\frac{-2y(x-1)}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}=-v_x$$

هذه الدوال متصلة لجميع $z\neq 1$. لاحظ أن $f(z)$ غير معرفة عند $z=1$ وبالتالي فـإن $f(z)$ تحليلية لجميع $z\neq 1$.

نظرية . إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند مجال D وأن $f'(z)=0$ في هذا المجال فإن $f(z)$ تكون ثابتة.

البرهان . لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ فإذا كانت $|f(z)|=0$ فإن $f=0$ ، عكس هذا أي أن

$$|f(z)|^2=u^2+v^2\equiv c\neq 0$$

بأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لـ $y\,,x$ يكون $uu_y+vv_y=0\ \ ,\ uu_x+vv_x=0$

وبما أن الدالة تحليلية فهي تحقق معادلتي كوشي-ريمان لذلك نجد

$$uu_x-vu_y=0\ \ ,\qquad vu_x+uu_y=0$$

وعليه يكون $(x^2+y^2)u_x=0\ ,\quad (x^2+y^2)u_y=0$

وهنا نستنتج أن $u_x=u_y=0$

وكذلك بنفس الطريقة نستنتج أن $v_x=v_y=0$

وبالتالي تكون الدالة f دالة ثابتة.

مثال. إثبت أن إذا كانت $f(z), \overline{f(z)}$ كلاهما تحليلية عند المجال D فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة خلال المجال D

الحل . لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

فتكتب $\overline{f(z)} = U(x,y) + iV(x,y)$

حيث $U(x,y) = u(x,y),\ V(x,y) = -v(x,y)$ (5)

وبما أن الدالة $f(z)$ تحليلية

إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان في المجال D أي أن

$u_x = v_y \ ; \ u_y = -v_x$ (6)

ومن كون الدالة $\overline{f(z)}$ تحليلية ، إذن نستنتج أن

$U_x = V_y \ ; \ U_y = -V_x$ (7)

بالنظر للعلاقات $(6), (7)$ نجد أن

$u_x = -v_y \ ; \ u_y = v_x$ (8)

بجمع المعادلتين $(6), (8)$ بما يقابلها نستنتج $u_x = 0$ في المجال D.

وكذلك بطرح المعادلتين $(6), (8)$ بما يقابلها نجد $v_x = 0$

لذلك $f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0$ وبإستخدام النظرية (٢-١٠) فإن الدالة تكون ثابتة .

مثال : برهن ان الداله

$$w = f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

تحقق معادلتي كوشي – ريمان عند النقطة $z = 0$ ولكنها ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$

الحل

بما أن $v = 0$; $u = x^2 + y^2$ ينتج

$u_x = 2x \ ; \ u_y = 2y$ $\qquad$ $v_x = 0 \ ; \ v_y = 0$

أن معادلتي كوشي ريمان تتحققان عند النقطة $z = 0 + i0$ لكن الدالة $f(z) = |z|^2$

.

(المحاضره : الثانية عشر)

الدالة التوافقية (Harmonic Function)

في هذا البند سنعرض نتيجة أخرى لمعادلتي كوشي-ريمان والتي تعتبر من المواضيع المهمة في الرياضيات التطبيقية في دراسة حركة الموائع ، الجهود الكهربائية والمغناطيسية ودرجة الحرارة الثابتة والجاذبية وهذه النتيجة يمكن استنتاجها من معادلتي كوشي-ريمان بفرض أن الدوال الحقيقية v, u قابلة للإشتقاق من الرتبة الثانية وكما يلي :

لدينا $u_x = v_y$ ومنها يكون $u_{xy} = v_{yy}$

وبنفس الطريقة $u_y = -v_x$ ومنها يكون $u_{yx} = -v_{xx}$

وبالجمع نستنتج أن $v_{xx} + v_{yy} = 0$

وبالمقابل أيضاً من معادلتي كوشي-ريمان يكون لدينا

$$v_{yx} = -u_{yy} \ , \qquad v_{xy} = u_{xx}$$

وبالطرح نستنتج أن $u_{xx} + u_{yy} = 0$

وهذه المعادلات تسمى معادلة لابلاس (Laplace’s Equation) نسبة إلى العالم الفيزيائي Laplace.

تعريف . لتكن $u(x, y)$ دالة قيم حقيقية في المتغيرين الحقيقيين x, y معرفة في المجال D يقال للدالة u دالة توافقية (Harmonic) في المجال D إذا كانت مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

مثال ٤٢ : الدالة $u(x, y) = e^{-y} \sin x$ دالة توافقية في أي مجال D لأن u_{xx} , u_{yy} موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس ولتوضيح ذلك

$$u_x = e^{-y}\cos x \quad , u_{xx} = -e^{-y}\sin x$$
$$u_y = -e^{-y}\sin x \quad , u_{yy} = e^{-y}\sin x$$

الآن
$$u_{xx} + u_{yy} = -e^{-y}\sin x + e^{-y}\sin x = 0$$

مثال: اثبت ان الداله
$f(x,y) = e^x \cos y$ داله توافقيه

<u>البرهان</u>: بما ان

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$$
$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y + (-e^x \cos y) = 0$$

من الواضح ان المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة f مستمرة لأنها تركيب دالتين مستمرتين وبما ان الدالة f قد حققت معادلة لا بلاس

$\therefore$ f دالة توافقية.

نظرية: اذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية في المجال D وكانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لكل من v, u مستمرة فإن v, u دوال توافقية في D.

البرهان . بما أن $f(z)$ دالة تحليلية إذن تكون معادلتي كوشي-ريمان متحققة أي أن

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

فإذا قمنا باشتقاق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}$$

وبنفس الطريقة نشتق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير y لنحصل على

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

وبما أن جميع المشتقات الجزئية $v_{yx}, v_{xy}, u_{yx}, u_{xx}$ مستمرة ، لذلك بإستخدام نظرية في التفاضل والتكامل للدوال الحقيقية التي تتحدث عن تساوي المشتقات الجزئية ، أي أن

$$u_{xy} = u_{yx}, \qquad v_{xy} = v_{yx}$$

لذلك ينبع من هذا أنه

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

وكذلك

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

وبهذا ينتهي البرهان.

تعريف.لتكن $f = u + iv$ واذا كانت u, v دوال توافقية في المجال D ومشتقاتهم الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق معادلتي كوشي-ريمان فيD فإن v يسمى مرافق توافقي لـ u .

مثال: لتكن $u(x, y) = x^2 - y^2$ فإن $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ وعليه يكون u دالة توافقية وكذلك نجد أن $v(x, y) = 2xy$ هي أيضاً دالة توافقية وكذلك $u_x = v_y = 2x$ و $u_y = -v_x = 2y$ وبالتالي يكون v مرافق توافقي للدالة u والدالة $f(z)$ تعطى بالصورة الآتية

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$$

نظرية .الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحليلية في المجال D إذا وفقط إذا كان v مرافق توافقي للدالة u.

البرهان . إذا v مرافق توافقي للدالة u في المجال D ، إذن باستخدام النظرية السابقة تكون f دالــة تحليــلية في D. كان

ولبرهنة الإتجاه الثاني ، إذا كانت f دالة تحليلية في D إذن يكون v, u دوال توافقية حسب النظرية السابقة بالإضافة إلــى ذلك معادلتي كوشي-ريمان متحققة .

مثال:إثبت أن الدالة الحقيقية $u(x, y) = ln(x^2 + y^2)$ دالة توافقية لكل الأعداد z ما عدا $z = 0$. ثم جد $f(z) = u + iv$.

الحل . في البداية نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة $u(x, y)$ بالنسبة لكلا المتغيرين y, x فيكون لدينا

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}\ , \qquad u_{xx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}\ , \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

وبالجمع نحصل على

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

إذن الدالة u دالة توافقية ،

ولإيجاد المرافق التوافقي لها ، نفرض أن $v(x, y)$ هو المرافق التوافقي وعليه من معادلتي كوشي-ريمان نحصل على

$$u_x = v_y = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad (9)$$

$$u_y = -v_x$$

وبتكامل العلاقة (9) بالنسبة للمتغير y نحصل على

$$v(x,y)=\int \frac{2x}{x^2+y^2}dy=2\,tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi(x)$$

حيث $\varphi(x)$ تمثل ثابت التكامل بالنسبة للمتغير y.

لذلك يجب أن نجد قيمة $\varphi(x)$ وذلك باستخدام المعادلة الثانية من معادلتي كوشي-ريمان حيث أن

$$v_x(x,y)=\frac{2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi'(x)$$

$$=\frac{2y}{x^2+y^2}+\varphi'(x)$$

ولكن

$$v_x=-u_y=\frac{-2y}{x^2+y^2}$$

وبالمقارنة فإن قيمة $\varphi'(x)=0$ لذلك تكون $\varphi(x)$ دالة ثابتة ولتكن قيمتها تساوي c

لذلك يكون المرافق v معرفة كالآتي

$$v(x,y)=2\,tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+c$$

والدالة التحليلية المقابلة هي

$$f(z)=ln(x^2+y^2)+i\left(2\,tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+c\right)$$

ولإيجادها بدلالة z نضع $y=0$ ، $z=x$ نستنتج أن

$$f(z)=ln(z^2)+ic$$

وبصورة عامة لإيجاد المرافق التوافقي لأي دالة توافقية نستخدم النظرية القادمة .

نظرية: ليكن $u(x,y)$ دالة توافقية عند جوار النقطة التي مركزها (x,y) فإنه يوجد مرافق توافقي $v(x,y)$ معرف على هذا الجوار وأن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة تحليلية .

البرهان . بما أن u,v دوال توافقية ، إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان

$$u_x=v_y \quad , \quad u_y=-v_x$$

والآن نستطيع أن نجد المرافق التوافقي $v(x,y)$ بخطوتين رئيسيتين :

الخطوة الأولى ، نكامل الدالة v_y والتي استنتجناها من u_x

نكاملها بالنسبة إلى y فيكون لدينا

$$v(x,y)=\int u_x(x,y)dy+c(x) \qquad (10)$$

حيث $c(x)$ دالة تعتمد على المتغير x فقط .

أما الخطوة الرئيسية الثانية فهي إيجاد $c'(x)$ باشتقاق المعادلة (10) بالنسبة للمتغير x ونعوض قيمة v_x بقيمة $-u$ في الطرف الأيسر فنحصل على

$$(11) \qquad -u(x,y) = \frac{d}{dx}\int u_x(x,y)dy + c'(x)$$

وبما أن u دالة توافقية فإن جميع حدود (11) تحذف ما عدا الحدود التي تعتمد على المتغير x ثم نكامل الدالة $c'(x)$ ذات المتغير المفرد لإيجاد قيمة $c(x)$

و هذه الخطوات أساسية لإيجاد $v(x,y)$ (المرافق التوافقي).

مثال :جد مرافق توافقيا

للدالة $v(x,y)$

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

نثبت أولا $u(x, y)$ دالة توافقية أي ان:-

$u_{yy} = -e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y \quad , \quad u_{xx} = e^x \cos y \quad , \quad u_x = e^x \cos y$

$$\therefore \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

باستخدام معادلتي كوشي – ريمان نحصل على:-

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$\therefore \quad V = \int v_y\, dy + \phi(x) = \int e^x \cos y dy + \phi(x) = e^x \int \cos y\, dy + \phi(x)$$

بأخذ التكامل بالنسبة لــ y واعتبار x ثابتة

$$\therefore \quad v = e^x \sin y + \phi(x)$$

حيث ان $\phi(x)$ دالة اختيارية تعتمد على x فقط وقابلة للاشتقاق نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لــ x بالنسبة لــ x للمعادلة الأخيرة ونساوي الناتج مع $\frac{-\partial u}{\partial y}$ لأن $v_x = -u_y$ ينتج:

$$v_x = e^x \sin y + \phi'(x) = -u_y = -(e^x(-\sin y))$$

$$\therefore e^x \sin y + \phi'(x) = e^x \sin y$$

$$\therefore \phi'(x) = 0$$

$$\phi(x) = c_1$$

حيث c_1 ثابت معقد اختياري

$\therefore$ المرافق التوافقي هو $\quad v = e^x \sin y + c_1$

Homework

١- اذا كانت $f(z) = z^2 + 2\bar{z} - Re(z)$ اوجد قيمة كل مماياتي

ا- $f(1+i)$ ب- $f(2i+1)$

٢- اكتب الداله الاتية بالصيغة $w = u(x,y) + iv(x,y)$

$$f(z) = \frac{z-i}{z+4}$$

٣- اذا كانت $f(z) = z^{21} - 5z^7 + 9z^4$، استخدم الاحداثيات القطبية لايجاد

ا- $f(-1+i)$ ب- $f(1-i\sqrt{3})$

٤- عبر عن الدالة الاتية بالصيغة $\bar{z}$ ، z

$$w = x^2 + y^2 - 2xy + i(x - xy)$$

٥- اوجد صورة القرص $|z-1| < 1$ عندما $w = (3+4i)z - 2 + i$

٦- اثبت ان صورة العمود $y = 1$ هي القطع المكافئ $u = \frac{v^2}{4} - 1$ تحت تأثير التطبيق $w = z^2$

٧- احسب الغايات الاتية ان وجدت

ا- $\lim_{z\to i} \frac{iz^3 - 1}{z+i}$ ب- $\lim_{z\to 0} \left(\frac{\ln(1-z^2)}{sin^2 2z}\right)$

٨- استخدم التعريف لاثبات ان

ا $\lim_{z\to 2i} z^2 = -4$

٩- لتكن

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & if \quad z \neq i \\ 0 & if \quad z = i \end{cases}$$

باستخدام التعريف ابت ان $\lim_{z\to i} f(z) = -1$

١٠- لتكن $f(z) = \frac{z\,Re\,z}{|z|}$ حيث $z \neq 0$ ولتكن $f(z) = 0$ اثبت ان $f(z)$ مستمرة لكل قيم z في المستوي العقدي

١١- لتكن $f(z) = \frac{1}{z}$، استخدم تعريف المشتقة لاثبات ان $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$

١٢- استخدم معادلتي كوشي ريمان لاثبات ان الدوال الاتية قابلة للاشتقاق لكل قيم z ثم استنتج $f'(z)$

ا- $f(z) = iz + 4i$ ب- $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

١٣- اثبت انه اذا كانت $\overline{f(z)}$ و $f(z)$ دالتان تحليليتان في مجال ما فان $f(z)$ دالة ثابتة.

١٤- ناقش الدالة الاتية من حيث قابليتها للاشتقاق وتحليلية

$$f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$$

١٥- جد الدالة التحليلية $f(z)$ بايجاد المرافق التوافقي للدالة الحقيقية

ا- $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$ ب- $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1$

١٦- اذاكان $\mathrm{v}(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $\mathrm{u}(x,y)$، اثبت ان $-\mathrm{u}(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $\mathrm{v}(x,y)$

١٧- اذاكان $\mathrm{v}(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $\mathrm{u}(x,y)$، اثبت ان $\mathrm{h} = u^2 - v^2$ دالة وافقية.

١٨- باستخدام الشكل القطبي لمعادلتي كوشي ريمان، بين ان الدالة $f(z) = \ln r + i\theta$ تحليلية في المجال

$r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$

(المحاضره : الثالثة عشر)

Elementary Functions الدوال الاولية

Polynomials of degree n الحدوديات من الدرجة

لتكن الدالة

$$w = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

حيث a_i $(i = 0 \dots n)$ ثوابت حقيقية ، n عدد صحيح موجب يسمى درجة الحدودية والدالة $f(z)$ تعد من أبسط الدوال العقدية وهي دالة تحليلية (مستمرة وقابلة للإشتقاق) في جميع نقاط المستوي العقدي.

(Exponential Function) الدوال الأسية

لتعريف هذه الدالة علينا الرجوع إلى مفاهيم من التفاضل والتكامل وبالأخص الدالة الأسية ذات المتغيرات الحقيقية ودالة الجيب والجيب تمام الحقيقية وبالتالي نستطيع أن نكتب

$$e^{it} = cos\, t - i\, sin\, t$$

تعريف . تعرف الدالة الأسية

$$exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \text{للعنصر} \qquad z = x + iy$$

كالآتي

$$exp(z) = e^x(cos\, y - i\, sin\, y) = e^x e^{iy}$$

من التعريف نرى أن e^z يمكن أن تقلص للدالة الأسية الإعتيادية عندما $y = 0$.

وعادة تكتب بالشكل e^z.

بعض خواص الدوال الاسية:

أ. الدالة الأسية $exp(z)$ دالة كلية وان $exp(z) \neq 0$.

ب. مشتقة الدالة الأسية $exp(z)$ هي $exp(z)$

ج. إذا كان z_1, z_2 عددان معقدان فإن $exp(z_1 + z_2) = exp(z_1) \cdot exp(z_2)$

د. إذا كان z_1, z_2 عددان معقدان فإن $exp(z_1 - z_2) = exp(z_1)/exp(z_2)$

هـ.إذا كان $z = x + iy$

$$\begin{aligned}|e^z| &= |exp(z)| = |exp(x+iy)| \\ &= |exp(x)\cdot exp(iy)| \\ &= |exp(x)|\cdot|exp(iy)| = |exp(x)|\cdot|exp(\cos y - i\sin y)| \\ &= |exp(x)|\cdot|1| = e^x\end{aligned}$$

و. الدالة الأسية دالة دورية من مضاعفات $(2\pi i)$ أي أن

$$\begin{aligned}e^{z+2\pi ki} = e^z e^{2\pi ki} &= e^z(\cos 2\pi k - i\sin 2\pi k) \\ &= e^z(1+0) = e^z\end{aligned}$$

مثال: جد جميع القيم $z = x + iy$ بحيث ان $e^z = 1 + i$

الحل . نكتب المعادلة $e^z = 1 + i$ بالصيغة الآتية :

$$e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$e^x = \sqrt{2}\ , \quad y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

وبما أن $ln(e^x) = x$ إذن سيكون لدينا

$$x = ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ ln\,2$$

و

$$y = \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

لذلك ينتج لدينا

$$z = \frac{1}{2}\ ln\,2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

مثال: جد حلول المعادلة

$e^z = z_0$ حيث $z_0 \neq 0$

الحل:

ليكن $z = x + iy$ و $z_0 = r_0 e^{i\Theta_0}$

وبالتعويض نحصل على $r_0 e^{i\Theta_0} = e^x e^{iy} \Leftarrow e^x = r_0$ ، $y = \Theta_0 + 2k\pi i$

$(k = 0 , \pm 1 , \pm 2, \ldots)$ حيث أن $x = \ln r_0$

وبهذا تكون الحلول هي $z = \ln r_0 + i(\Theta_0 + 2k\pi)$ وان k هو عدد صحيح (أي ان هناك عدد لا نهائي من الحلول للمعادلة أعلاه وعليه فانه يتضح من هذا المثال بان الدالة الاسية هي دالة منطلقها جميع نقاط المستوي z ومداها يمثل جميع نقاط المستوي w عدا نقطة الأصل وان هذه الدالة غير متباينة ؟ لان كل النقاط لها صورة واحدة z_0 في المستوي w .

مثال: اثبت ان

$$\exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i);$$

الحل:

$$\exp\frac{2+\pi i}{4} = \left(\exp\frac{1}{2}\right)\left(\exp\frac{\pi i}{4}\right) = \sqrt{e}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i).$$

مثال: اثبت ان

$$\exp(z + \pi i) = -\exp z.$$

الحل:

$$\exp(z+\pi i) = (\exp z)(\exp \pi i) = -\exp z, \quad \text{since } \exp \pi i = -1.$$

مثال: اثبت ان

$$|\exp(z^2)| \le \exp(|z|^2).$$

الحل:

نكتب اولا:

$$\left|\exp(z^2)\right| = \left|\exp[(x+iy)^2]\right| = \left|\exp(x^2-y^2)+i2xy\right| = \exp(x^2-y^2)$$

ونكتب

$$\exp(|z|^2) = \exp(x^2+y^2).$$

بما ان

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 \le x^2 + y^2}$$

من الواضح ان

$$\boldsymbol{exp(x^2 - y^2) \le exp(x^2 + y^2)}$$

وبهذا ينتهي البرهان

الدالة اللوغارتمية (The Logarithmic Function)

من أهم الدوافع لتعريف الدالة اللوغارتمية هو حل المعادلة $e^w = z$ للمتغير w حيث z أي عدد معقد غير صفري وهذه المعادلة لها عدد غير منتهي من الحلول لأن e^w ليست دالة متباينة (واحد-إلى-واحد) ومعكوسها هو الدالة اللوغارتمية الدالة متعددة القيم لذلك سنهتم بصورة خاصة بتعريف فروع اللوغارتم الذي يكون واحد-الى-واحد.

تعريف . لتكن $z \neq 0$ فإن الدالة اللوغارتمية $log\, z$ هي معكوس الدالة الأسية
أي أن $log\, z = w$ إذا وفقط إذا كان $z = e^w$
وبهذه الحالة فإن $log\, z = ln|z| + i(arg\, z) \quad (z \neq 0\,)$
حيث $ln|z|$ هو اللوغارتم الطبيعي للعدد الموجب $|z|$.

تعريف . لتكن $z \neq 0$ فإن القيمة الرئيسية (الأساسية) للوغارتم تعرف كالآتي

$$Log(z) = ln|z| + i\, Arg(z)\ , \qquad (|z| > 0\ , -\pi < Arg(z) \le \pi\,)$$

نلاحظ أن $Log(z)$ دالة ذات قيمة واحدة وأن منطلق (مجال) هذه الدالة هي كل الأعداد العقدية غير الصفرية في المستوي

العقدي z ومداها هو الشريط الأفقي $-\pi < Im\,(w) \le \pi$ في المستوي العقدي w.
وكذلك نلاحظ أن من التعريفين السابقين أن قيمة $log\, z$ تكون كالآتي:

$$log\, z = Log(z) + 2n\pi i \qquad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

ويمكن كتابة الدالة اللوغارتمية بالشكل القطبي وكما يلي :

$$log\, z = ln\, r + i(\theta + 2n\pi) \ , z = re^{i\theta} \ \ , n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

مثال: إذا كان $z = -1 - \sqrt{3}i$ فجد $log\, z$

الحل . من المعروف سابقاً أننا نستطيع إيجاد قيمة $|z|$، والسعة الزاوية للعدد لذلك يكون $r = 2$, $\theta = \frac{-2\pi}{3}$

وعليه يكون

$$log\, z = ln\, 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$
$$= ln\, 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

مثال :جد 2^i

الحل:

$$2^i = e^{i \log 2} \text{ , but } \log 2 = \ln 2 + 2k\pi i \ , \ k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots$$

$$\therefore e^{i \log 2} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)}$$

$$= e^{i \ln 2 - 2k\pi} \qquad , k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots$$

مثال: احسب

$$\log(1 + i)$$

الحل:

بما ان

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \log(1+i) = \ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i \qquad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

(المحاضره: الرابعة عشر)

نظرية . أ. الدالة $log\, z$ دالة غير مستمرة عند كل نقط z التي تحقق الشرطين

$$Im\, z = 0 \;\; , \;\; Re\, z \leq 0$$

ب. الدالة $log\, z$ قابلة للإشتقاق عند كل النقط التي لا تقع على الشعاع $r = 0$ ، $\theta = \pi$.

البرهان: أ. لإيجاد غاية الدالة $log\, z$ عندما تقترب $z \to z_0$ حيث $(Im\, z = 0 \;\; , \;\; Re\, z \leq 0)$ تقع على الشعاع $\theta = \pi$ حيث يؤخذ المسار الأول عند إقتراب z من z_0 من النصف الأعلى للمستوي والثاني من النصف الأسفل للمستوي العقدي فعند أخذ المسار الأول سنحصل على

$$\lim_{z \to z_0} log\, z = \lim_{(r,\theta) \to (r_0,\pi)} (ln\, r + \theta i)$$
$$= ln\, r_0 + \pi i$$

أما المسار الثاني فستكون الغاية كالآتي :

$$\lim_{z\to z_0} log\, z = \lim_{(r,\theta)\to(r_0,\pi)} (ln\, r + \theta i)$$
$$= ln\, r_0 - \pi i$$

وعليه ستكون الغاية غير موجودة عند كل نقاط z التي تحقق $Re\, z \le 0$, $Im\, z = 0$ ولهذا ليست قابلة للإشتقاق (وليست تحليلية).

ب. بما أن $log\, z = ln\, r + \theta i$

فإن $u(r,\theta) = ln\, r$, $v(r,\theta) = \theta$

وعند استخدامنا معادلتي كوشي-ريمان حيث أن الدالة تحقق معادلتي كوشي-ريمان عند كل نقطة لاتقع على الشعاع $\theta = \pi$ ، نجد ان

$$u_r = \frac{1}{r}\, , u_\theta = 0\, , v_r = 0\, , v_\theta = 1$$

وهذه المشتقات الجزئية مستمرة عند كل نقطة z_0 بحيث أن

$$\theta = arg\, z \ne \pi$$

وكذلك تحقق معادلتي كوشي-ريمان أي أن الدالة $log\, z$ قابلة للإشتقاق عند كل $z \ne 0$ التي لا تقع على الشعاع $\theta = \pi$ وان مشتقاتها هي

$$\frac{d}{dz}(log\, z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{z} \quad (r = |z| > 0\, , -\pi < Arg\, z < \pi)$$

ملاحظة. عند استخدام فروع دالة اللوغارتم فإن بعض الخصائص لايمكن دائماً إن تؤخذ من دالة اللوغارتم التي دُرِست في التفاضل والتكامل ولتوضيح ذلك لدينا المثال الآتي .

مثال:

$$Log(i^3) = Log(-i) = ln\, 1 - i\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}i$$
$$3Logi = 3\left(ln\, 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}i$$

وهنا نجد أن $Log(i^3) \ne 3Logi$

نظرية . إذا كان $z_2\, , z_1$ عددين معقدين غير صفريين فإن

أ. $log(z_1 z_2) = log\, z_1 + log\, z_2$

ب. $log(z_1/z_2) = log\, z_1 - log\, z_2$

ج. $log\left(\frac{1}{z}\right) = -\, log\, z$

سنبرهن الخاصية (أ) أما البقية فتترك كتمرين للطالب.

البرهان . من تعريف دالة اللوغاريتم يكون لدينا

$$log(z_1 z_2) = ln|z_1||z_2| + i\, arg(z_1 z_2)$$

$$= ln|z_1| + ln|z_2| + i\,arg(z_1) + i\,arg(z_2)$$
$$= ln|z_1| + i\,arg(z_1) + ln|z_2| + i\,arg(z_2)$$
$$= log\,z_1 + log\,z_2$$

وهنا يجب ملاحظة إن الخاصية (١) ، (٢) في النظرية أعلاه تتحقق بصورة عامة عند دالة $Log(z)$ ومثال على ذلك

مثال: لتكن $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ فإن $z_1.z_2 = -ui$ ولإيجاد القيمة الرئيسية لدالة اللوغاريتم فإننا نجد أن

$$Log(z_1z_2) = Log(-ui) = ln\,u - \frac{i\pi}{2}$$
$$Log(z_1) + Log(z_2) = Log\left(-\sqrt{3} + i\right) + Log\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$
$$= ln\,2 - \frac{i5\pi}{6} + ln\,2 + \frac{i2\pi}{3} = ln\,u + \frac{i3\pi}{2}$$

لذلك بصورة عامة فإن

$$Log(z_1z_2) \neq Log\,z_1 + Log\,z_2$$

تعريف(الاسس العقدية). ليكن $z \neq 0$ وأن c عدد معقد نعرف z^c بواسطة المعادلة الآتية

$$z^c = exp(c\,log(z)) = e^{c\,log(z)}$$

حيث $log(z)$ دالة اللوغارتم متعدد القيم لذلك الدالة z^c ستكون بصورة عامة ذات قيم متعددة والدالة f التي تعطى بالصورة الآتية

$$f(z) = e^{c\,log(z)}$$

تسمى الفرع الرئيسي للدالة z^c

مثال: جد قيمة i^{-2i}

الحل . من التعريف فإن $i^{-2i} = e^{-2i\,log\,i}$

ولكن
$$log\,i = ln\,i + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$
$$= \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

لذلك يكون لدينا

$$i^{-2i} = e^{(4n+1)\pi}$$

ملاحظـــــة: بما أن الدالة الأسية لها الخاصية $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$ لذلك نستطيع أن نكتب

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{e^{c\,log(z)}} = e^{-c\,log(z)} = z^{-c}$$

لذلك وفقا لهذه الملاحظة وبالعودة إلى المثال أعلاه نجد أن

$$i^{-2i} = \frac{1}{i^{2i}} = e^{((4n+1)\pi)}$$

ولإيجاد مشتقة الدالة $f(z) = e^{c\,log(z)}$ باستخدام قاعدة السلسلة يكون لدينا

$$f'(z) = \frac{c}{z} e^{c\,log(z)}$$

وعليه تكون مشتقة z^c كما يلي

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{c}{z} z^c$$

وهذه متحققة إذا كان z^c هي القيمة الأساسية وعندما z تقع في المجال $-\pi < Arg\, z < \pi\,, |z| > 0$ حيث c عدد معقد.

مثال: القيمة الرئيسية للدالة $(-i)^i$ هي

$$e^{i\,log(-i)} = e^{i\left(ln\,1 - i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

مثال: الفرع الرئيسي للدالة $z^{\frac{2}{3}}$ يمكن كتابته بالصورة الآتية

$$e^{\frac{2}{3}log\,z} = e^{\frac{2}{3}ln\,r + \frac{2}{3}i\theta} = \sqrt[3]{r^2}\; e^{\frac{2i\theta}{3}}$$

لذلك القيمة الرئيسية للدالة $z^{\frac{2}{3}}$ هي

$$\sqrt[3]{r^2}\; cos\frac{2\theta}{3} + i\sqrt[3]{r^2}\; sin\frac{2\theta}{3}$$

والدالة تحليلية في المجال $-\pi < \theta < \pi\,, r > 0$

مثال: جد

$$\log(-1 - \sqrt{3}i)$$

بما ان

$$r = 2\,, \theta = \frac{-2\pi}{3}$$

فأن

$$\log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

مثال : اثبت ان

$$\boldsymbol{Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2} i}$$

الحل:

$$\mathrm{Log}(-ei) = \ln|-ei| + i\mathrm{Arg}(-ei) = \ln e - \frac{\pi}{2} i = 1 - \frac{\pi}{2} i.$$

مثال: اثبت ان

$$\log(-1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + 2(n+\frac{1}{3})\pi i$$

الحل:

$$\log(-1+\sqrt{3}i) = \ln 12 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2(n+\frac{1}{3})\pi i\,, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

مثال: اثبت ان

$$log\ e = 1 + 2n\ \pi i$$

الحل:

$$log\ e = ln\ e + i(0 + 2n\pi) = 1 + 2n\ \pi i\,, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

مثال: اثبت ان

$$\boldsymbol{-1^{1/\pi} = exp[(2n+1)i]}$$

الحل:

$$(-1)^{1/\pi} = \exp\left[\frac{1}{\pi}\log(-1)\right] = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\left[\ln 1 + i(\pi + 2n\pi)\right]\right\} = \exp[(2n+1)i].$$

مثال: القيمة الرئيسية للدالة

$(1-i)^{4i}$

الحل:

$$(1-i)^{4i}=\exp[4i\mathrm{Log}(1-i)]=\exp\left[4i\left(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}\right)\right]=e^{\pi}e^{i4\ln\sqrt{2}}$$

مثال: القيمة الرئيسية للدالة

$[\frac{e}{2}(-1-\sqrt{3}i)]^{3\pi i}$

الحل:

$$\left[\frac{e}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right]^{3\pi i}=\exp\left\{3\pi i\mathrm{Log}\left[\frac{e}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right]\right\}=\exp\left[3\pi i\left(\ln e-i\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\exp(2\pi^2)\exp(i3\pi)=-\exp(2\pi^2).$$

(المحاضره: الخامسة عشر)

الدوال المثلثية والزائدية . Trigonometry and Hyperbolic Functions

الدوال المثلثية (جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية و... إلخ) في المتغيرات العقدية لا تلعب نفس الدور البارز كما هي الحال في الدوال الحقيقية لذلك نستطيع تعريفها بمجرد تركيبات خاصة من الدوال الأسية .

تعريف . دالة الجيب الجيب تمام للمتغير العقدي تعرف كالآتي:

$$sin\, z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$cos\, z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

هذه الدوال هي دوال كلية لأنها تركيب من دوال كلية حيث أنهكما معروف لدينا

$$e^{iz} = cos\, z + i\, sin\, z \qquad (1)$$

$$e^{-iz} = cos\, z - i\, sin\, z \qquad (2)$$

بجمع هاتين المعادلتين ينتج لنا

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\, cos\, z$$

ومنه

$$cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

وكذلك عند طرح المعادلتين ينتج لنا

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\, sin\, z$$

إذن

$$sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ومنها نستطيع الحصول على كل الدوال المثلثية الأخرى.

هناك خواص لهذه الدوال تشبه الخواص في المتغيرات الحقيقية التي درست سابقاً وكذلك بعض الخواص التي تتميز بها الدوال المثلثية ذات المتغيرات العقدية عن مثيلتها في الدوال الحقيقية التي سنذكرها الان .

أ. الدالتان $cos\, z\ ,sin\, z$ دالتان دوريتان بحيث دورة كل منهما 2π وذلك لأن

$$sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}.e^{2\pi i} - e^{-iz}.e^{-2\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}(cos\, 2\pi + i\, sin\, 2\pi) - e^{-iz}(cos\, 2\pi - i\, sin\, 2\pi)}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}(1+0) - e^{-iz}(1-0)}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = sin\, z$$

وبنفس الطريقة نثبت أن

$$cos(z + 2\pi) = cos\, z$$

ب. الدالتان $cos\, z\ ,sin\, z$ دالتان تحليليتان في كل قيم z في المستوي العقدي لذلك تكون دالتان كليتان ومشتقاتهما تعطى

بالعلاقة

$$\frac{d\sin z}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)=\frac{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{2i}=\cos z$$

وبنفس الطريقة نثبت أن

$$\frac{d\cos z}{dz}=-\sin z$$

ج. الدالة $\cos z=0$ إذا وفقط إذا كان $z=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad ,n=0,\pm1,\pm2,\dots$

وكذلك الدالة $\sin z=0$ إذا وفقط إذا كان $z=n\pi \quad ,n=0,\pm1,\pm2,\dots$

د.

$$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$
$$\cos(x+iy)=\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y$$

لإثبات ذلك نتبع الخطوات التالية:

$$\begin{aligned}\sin z=\sin(x+iy)&=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}\right)\\&=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)\\&=\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})\sin x+i\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x\\&=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة نثبت العلاقة الثانية .

هـ.

$$|\sin z|^2=\sin^2 x\sinh^2 y$$
$$|\cos z|^2=\cos^2 x\sinh^2 y$$

من هاتين العلاقتين يتبين لنا أن $\cos z\ ,\sin z$ دالتين غير مقيدة في المستوي العقدي بينما في الدوال الحقيقية القيمة الدالتين

المطلقة لـ $\sin z$ و $\cos z$ أقل او يساوي ١ لكل قيم x ولتوضيح ذلك سنبرهن في البداية العلاقتين أعلاه حيث

$$\begin{aligned}|\sin z|^2&=|\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y|^2\\&=\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y\\&=\sin^2 x\,(\cosh^2 y-\sinh^2 y)+\sin^2 y\,(\cosh^2 x-\sinh^2 x)\end{aligned}$$

وبما أن $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ وكذلك $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$

لذلك نحصل على

$$|\sin z|^2=\sin^2 x\sinh^2 y$$

وبنفس الطريقة نثبت العلاقة الثانية.

الان إذا وضعنا $z=x_0+iy$ في العلاقة الأولى ولندع $y\to\infty$

فإن

$$\lim_{y\to\infty}|\sin(x_0+iy)|^2=\sin^2 x_0+\lim_{y\to\infty}\sinh^2 y=\infty$$

وهذا يوضح ما ذكرناه آنفاً أن $\sin z$ دالة غير مقيدة وهذا ينطبق على $\cos z$ وهذا من أهم ما يميز به الدوال المثلثية العقدية عن مثيلاتها ذات القيم الحقيقية .

والآن سنعرف الدوال المثلثية الزائدية في المستوي العقدي لأي z حيث أن تعريفها كما هو في المتغيرات الحقيقية أي أن عدد

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

وبما أن e^{-z}, e^z دوال كلية لذلك تكون $\cosh z , \sinh z$ أيضا دوال كلية ومشتقاتها تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z \quad , \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$$

ومنها نستنتج تعريف بقية الدوال المثلثية الزائدية . ومن ميزات هذه الدوال عن الدوال ذات المتغيرات الحقيقية تكون الدالتان $\cosh z , \sinh z$ دالتان دوريتان دورة كل منهما هي $(2\pi i)$ حيث أن

$$\begin{aligned}
\sinh(z + 2\pi i) &= \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2} \\
&= \frac{e^z . e^{2\pi i} - e^{-z} . e^{-2\pi i}}{2} \\
&= \frac{e^z(\cos 2\pi i + i \sin 2\pi i) - e^{-z}(\cos 2\pi i - i \sin 2\pi i)}{2} \\
&= \frac{e^z(1+0) - e^{-z}(1-0)}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z
\end{aligned}$$

وكذلك بنفس الطريقة بالنسبة للدالة $\cosh z$.

أما بقية المتطابقات المعروفة في المجال الحقيقي تصح في المجال العقدي ولكن في المجال العقدي يوجد إرتباط بين الدوال الزائدية المثلثية العقدية والحقيقية فمثلاً نلاحظ أن

أ. $\sin(iz) = i \sinh z \;\; , \;\; \sinh(iz) = i \sin z$

ب. $\cos(iz) = i \cosh z \;\; , \;\; \cosh(iz) = i \cos z$

ج. $\tan(iz) = i \tanh z \;\; , \;\; \tanh(iz) = i \tan z$

وبرهان هذه الخواص تترك كتمرين للطالب.

مثال: إثبت أن $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ ومنه نستنتج ان الدلة $\sin \bar{z}$ غير تحليلية في اي مكان

الحل : من الواضح لدينا

$$\overline{\sin z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

$$\sin \bar{z} = \sin x \cos iy \quad - \cos x \sin \; iy$$

وبما ان الدالة $\cos iy = \cosh y$ والدالة $\sin iy = i \sinh y$ لذلك يكون لدينا

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

وبهذا نستنتج أن $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$.

مثال: اثبت ان

$$\overline{cos(\iota z)} = cos(\iota \overline{z})$$

الحل: من الواضح لدينا

$$\overline{\cos(iz)} = \overline{\cos(-y + ix)} = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x$$

and

$$\cos(i\overline{z}) = \cos(y + ix) = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x.$$

وبهذا نستنتج أن$\overline{cos\, z} = cos\, \overline{z}$.

(المحاضره : السادسة عشر)

الدوال المثلثية والزائدية العكسية Inverse Trigonometry and Hyperbolic Functions

الدوال العكسية المثلثية والزائدية نستطيع أن نصف حدودها باللوغارتمات ولغرض تعريف الدالة العكسية للدالة $sin\, z$
نكتب إذا كان $z = sin\, w$ فإن $w = sin^{-1} z$
فإذا كانت

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

فإننا سنحصل على

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2iz\left(e^{iw}\right) - 1 = 0$$

بحل المعادلة التربيعية أعلاه بالنسبة للمتغير e^{iw} نجد أن

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

وبأخذ اللوغارتم لكلا الطرفين يكون لدينا

$$sin^{-1} z = -i\, log\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

ومن هنا نلاحظ أن $sin^{-1} z$ دالة متعددة القيم مع عدد غير منته من القيم لكل نقطة z وبنفس الطريقة نستطيع أن نجد بقية الدوال العكسية لذلك سيكون لدينا

$$cos^{-1} z = -i\, log\left[z + i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$tan^{-1} z = \frac{i}{2} log \frac{i + z}{i - z}$$

وكلاهما دالة متعددة القيم وهم دوال تحليلية لأنها ناتجة من تركيب دالتين تحليليتين .
أما مشتقاتهم فنحصل عليها بسهولة من مشتقات اللوغارتم حيث تكون مشتقة $sin^{-1} z$, $cos^{-1} z$ كالآتي:

$$\frac{d}{dz} sin^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \qquad \frac{d}{dz} cos^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

والتي تعتمد بالتأكيد على اختيارنا للقيم داخل الجذر التربيعي أما بالنسبة لمشتقة $tan^{-1} z$ فتأخذ الصيغة الآتية:

$$\frac{d}{dz} tan^{-1} z = \frac{1}{1 - z^2}$$

مثال: جد قيمة $sin^{-1} \sqrt{2}$

الحل . $$sin^{-1} \sqrt{2} = -i\, log\left[i\sqrt{2} + \left(1 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = -i\, log\left(i\sqrt{2} \mp i\right)$$

$$= i\left[ln\left(\sqrt{2} \mp i\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\, ln\left(\sqrt{2} \mp i\right)$$

حيث n عدد صحيح موجب.

الآن إذا لاحظنا أن

$$ln\left(\sqrt{2} - i\right) = ln\frac{\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{2} + i\right)}{\left(\sqrt{2} + i\right)} = ln\frac{1}{\left(\sqrt{2} + i\right)} = -ln\left(\sqrt{2} + i\right)$$

لذلك يمكننا أن نكتب

$$sin^{-1}\sqrt{2} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mp i\, ln\left(\sqrt{2} + i\right)$$

حيث n عدد صحيح موجب.

الآن سنتطرق إلى الدوال الزائدية العكسية والتي تعطى بالمعادلات الآتية :

أ. $sinh^{-1} z = log\left[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right]$

ب. $cosh^{-1} z = log\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$

ج. $tanh^{-1} z = \frac{1}{2} log\frac{1+z}{1-z}$

والمشتقات لهذه الدوال تكون بالصورة الآتية

أ. $\frac{d}{dz} sinh^{-1} z = \frac{1}{(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

ب. $\frac{d}{dz} cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

ج. $\frac{d}{dz} tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$

مثال: جد قيمة $sinh^{-1} 2\, i$

الحل :

$$sinh^{-1} i = log\left[2i + (-2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right] = log(3\, i) = \ln 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$$

حيث n عدد صحيح موجب.

مثال: جد قيمة $tanh^{-1}(1 + 2i)$

الحل :

$$tanh^{-1}(1+2i)=\frac{1}{2}log\frac{1+1+2i}{1-1-2i}=\frac{1}{2}log(-1+i)=\frac{1}{4}ln2+i\left(\frac{3}{8}+n\right)\pi\ \ ,n\in\mathbb{Z}$$

مثال: جد قيمة $sin^{-1}(-i)$

الحل:

$$sin^{-1}(-i)=-i\,log\left[1+\sqrt{2}\right]$$

مثال: جد قيمة

$cosh^{-1}(\frac{-1}{2})$

:الحل

$$\cosh^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)=\log\left(\frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-1}\right)$$

$$=\log\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=\log\ e^{i(2\pi/3)}=\frac{2\pi}{3}i$$

مثال: جد قيمة $tan^{-1}(-i)$

:الحل

$$\tan^{-1}(-i)=\frac{i}{2}\log\frac{i+(-i)}{i-(-i)}=\frac{i}{2}\log(0)=\frac{i}{2}$$

مثال: جد قيمة $cos^{-1}(i)$

الحل:

$$cos^{-1}(i)=-ilog\left(i+\sqrt{-1-1}\right)=-ilog(i+i\sqrt{2})$$

$$=i[\log(i)+\log\left(1+\sqrt{2}\ \right)]=i[loge^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)]$$

$$=-i\left[i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-ilog\left(1+\sqrt{2}\right),k=0\pm1,\pm2,..$$

Homework

١- جد قيم $e^z = u + iv$ لقيمة z الاتية

$z = 2 + 3\pi$

٢- جد قيم z التي تحقق المعادلات الاتية

ا- $e^z = \sqrt{3} + i$ ب- $e^z = -ie$ ج- $\cos z = \cosh 2$ د- $Log\, z = 1 - \frac{i\pi}{4}$

٣- جد قيم كل ممايأتي

ا- $(2+i)^{1-i}$ ب- $(-1)^{\sqrt{2}}$ ج - $sin^{-1}i$ د- $tan^{-1}i$

٤- اثبت ان

ا- $e^{|z|^2} \geq \left|e^{z^2}\right|$ ب- $e^{\bar{z}}$ دالة غير تحليلية

٥- جد قيمة $\log z$ لكل من القيم الاتية

ا- $z = 2i$ ب- $z = -\sqrt{3} - i$

٦- اثبت ان $|sinhy| \leq |\sin z| \leq |\cosh y|$

٧-

٨- اثبت ان $\sin \bar{z}$ دالة غير تحليلية

٩- اذا كانت $z_1 = i + i\,, z_2 = i$ و $a = \frac{1}{2}$ ، اثبت ان $(z_1 z_2)^a \neq {z_1}^a {z_2}^a$

(المحاضره : السابعة عشر)

التكامل العقدي Complex Integral

ليكن

$$f(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{حيث} \quad a \le t \le b$$

حيث $u(t)\,, v(t)$ دوال ذات قيم حقيقية للمتغير الحقيقي t ونحن نعرف من خلال دراستنا للدوال الحقيقية أنه إذا كانت u, v دوال مستمرة على فترة ما فإنها تكون قابلة للتكامل عند المتغير t لذلك من الممكن كتابة

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

ومن الواضح أنه لحساب تكامل الدالة $f(t)$ فإننا نحسب تكامل الدوال u, v فإذا كانت

$$v'(t) = v(t)\,, u'(t) = u(t)$$

فإن

$$\int_a^b f(t)dt = u(b) - u(a) + i\big(v(b) - v(a)\big)$$

مثال: جد قيمة التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2it}dt$$

الحل .

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2it}dt = \left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

لذلك فالتعريف أعلاه سيكون

$$= \left[\frac{\cos 2t + i\sin 2t}{2i}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2i}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - 1\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

مثال: جد قيمة التكامل

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{-it} dt$$

الحل .

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{-it} dt = \left[\frac{e^{-it}}{-i}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$e^{it} = cos\, t + i\, sin\, t$$

$$= \left[\frac{cos -t + i\, sin -t}{-i}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{-i}\left[cos -\frac{\pi}{3} + i\, sin -\frac{\pi}{3} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{-i}\left[cos \frac{\pi}{3} - i\, sin \frac{\pi}{3} - 1\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2i}$$

مثال: احسب التكامل

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{it} dt$$

الحل .

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{it} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\, dt + i \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t\, dt$$

$$= [sin\, t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + i[-\cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

مثال: جد قيمة التكامل

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$$

الحل .

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt - 2i\int_1^2 \frac{1}{t} dt$$
$$= -\frac{1}{2} - 2i\ln 2 = -\frac{1}{2} - i\ln 4$$

ملاحظه: التكامل العقدي له نفس الخواص التي تنطبق على التكامل الحقيقي.

نظرية. لتكن $f(t) = u_1(t) + iv_1(t)$, $g(t) = u_2(t) + iv_2(t)$ دوال مستمرة معرفة على الفترة $a \le t \le b$ فإن

أ. $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)dt$

ب. لأي عدد حقيقي c فإن $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)dt$

ج. إذا كان $c + id$ عدد معقد فإن

$$\int_a^b (c+id)f(t)\,dt = (c+id)\int_a^b f(t)\,dt$$

د. $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

هـ. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$

و. $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b [u_1(t)u_2(t) - v_1(t)v_2(t)]\,dt + i\int_a^b [u_1(t)v_2(t) + v_1(t)u_2(t)]\,dt$

البرهان .

(هـ) فقط وذلك بإعادة كتابة الدالة بالشكل القطبي فتكون

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| e^{\theta_0 i}$$

لذلك

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b e^{-\theta_0 i} f(t) dt$$

وكذلك

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b Re\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right) dt$$

وكما هو معروف لدينا من خلال خواص الأعداد العقدية أنه

$$Re\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right) \le \left|e^{\theta_0 i} f(t)\right| \le |f(t)| \quad , \qquad a \le t \le b$$

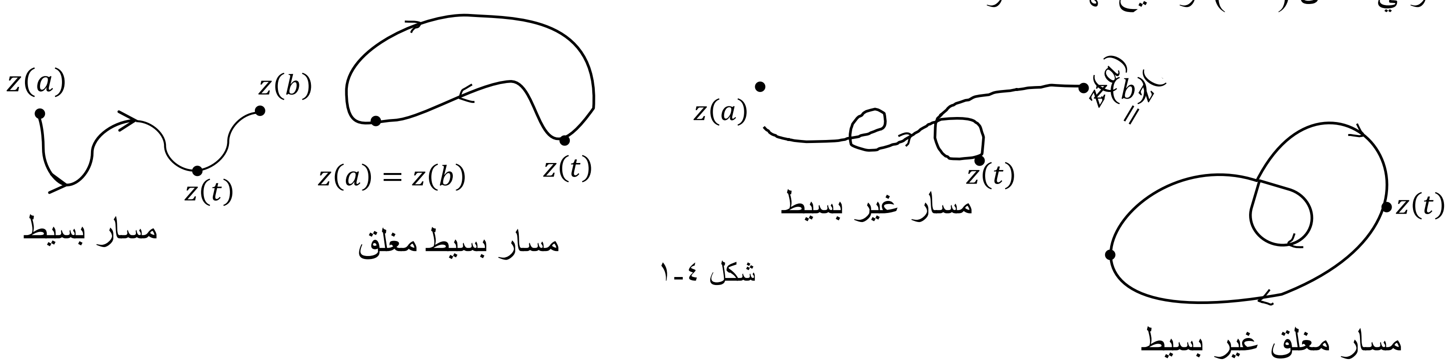
اذن

$$\int_a^b Re\left(e^{-\theta_0 i} f(t)\right) dt \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

وبهذا يتحقق البرهان .

(المحاضره: الثامنة عشر)

الآن سنقوم بتعريف وحساب التكاملات من الصيغة $\int_c f(z)dz$ حيث f دالة ذات قيم معقدة و c مسار (منحني) في المستوي $\mathbb{C}$ وهنا سنقوم بإعادة تعاريف بعض ماتم عرضه في الفصل الأول كتعريف المسار c باستخدام مفهوم الدالة الوسيطية . حيث c يسمى بسيط إذا لم يقطع نفسه بأي نقطة أي أن $z(t_1) \neq z(t_2)$ عندما يكون $t_1 \neq t_2$ ويسمى مغلق إذا كان $z(a) = z(b)$ أما إذا كانت نقطة التقاطع الوحيدة $z(a) = z(b)$ فإن c يسمى مسار مغلق بسيط وفي الشكل (٤-١) توضيح لهذه المعلومات



شكل ٤-١

الدالة ذات القيم العقدية $z(t)$

$$(1) \qquad C: z(t) = x(t) + iy(t)$$

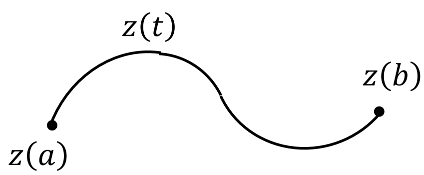
تكون قابلة للإشتقاق إذا كان كل من $x(t)$, $y(t)$ دوال حقيقية قابلة للإشتقاق حيث $a \leq t \leq b$ والمشتقة $z'(t)$ بالنسبة لـ t تكون معرفة بالمعادلة

$$(2) \qquad z'(t) = x'(t) + iy'(t) \qquad a \leq t \leq b$$

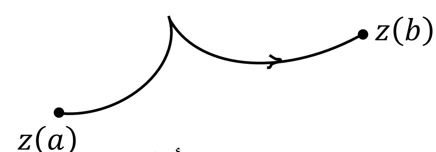
المنحني (المسار) C المعرف أعلاه يكون أملس إذا كان $z'(t)$ المعرفة أعلاه مستمرة وغير صفرية على الفترة $[a, b]$ وعليه يكون له ميل متجه غير صفري فإذا كان $x'(t_0) = 0$ فإن ميل المتجه $z'(t_0) = iy'(t_0)$ عمودياً وإذا كان $x'(t_0) \neq 0$ فإن الميل $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $z(t_0)$ يعطى بالصيغة $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ والزاوية الناتجة تكون بالصيغة الآتية

$$\theta(t) = arg\big(z'(t)\big) = arg[x'(t) + iy'(t)]$$

ملاحظـــة : المنحني الأملس ليس له أي زوايا أو نتوء كما موضح بالشكل



منحني أملس



منحني غير أملس

شكل ٤-٢

المنحني يسمى منحني جوردان إذا كان مستمراً ومتبايناً والمنحني الأملس يكون مساراً قابلاً للإصلاح إذا كانت $z'(t)$ موجودة في كل مكان في المجال المحدد $[a,b]$ وقابلة للتكامل بحسب مفهوم لينك أي ان

$$\int_a^b |z'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 dt}$$

واخيراً يسمى المنحني C المكون من عدد منتهٍ من المنحنيات الملساء مرتبطة بحيث أنه إذا كان $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ منحنيات ملساء حيث C_k تتوافق من نقطة البداية C_{k+1} لكل $k = 1,2,\dots,n-1$ فإن C يسمى كانتور ويعبـــــر عنه بالصيغة الآتية:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

اما طول المسار (الكانتور)

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \big(length\ of\ \gamma_j\big) = \sum_{j=1}^{n} L\big(\gamma_j\big)$$

فإذا كانت الدالة مستمرة عند $\{\gamma\}$ فإن مسار التكامل (كانتور) للدالة f على طول المنحني γ يعرف كالآتي:

$$\int_{\gamma} f\,(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f\,(z)dz$$

مثال: لتكن $f(z)=\frac{1}{z}$ حيث $z\neq 0$ ولتكن γ معرفة كالآتي

$$\gamma: z(t)=e^{it}\,,\qquad 0\le t\le \pi$$

الحل.

نلاحظ إن γ منحني دائرة الوحدة موجهة بالاتجاة الموجب

$$\int_{\gamma} f\,(z)dz=\int_{\gamma}\frac{1}{z}\,dz=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\,ie^{it}dt$$

$$=\int_{0}^{2\pi} i\,dt=[it]_{0}^{2\pi}=2\pi i$$

مثال: لتكن $f(z)=z$ ولتكن γ معرفة كالآتي

$$\gamma: z(t)=2t+it\,,\qquad 0\le t\le 1$$

الحل.

$$I=\int_{\gamma} f\,(z)dz=\int_{\gamma} z\,dz=\int_{0}^{1}(2t+it)(2+i)\,dt$$

$$=\int_{0}^{1}(3t+4it)\,dt=\frac{3}{2}+2i$$

طريقة ثانية للحل.

نفرض أن $z=x+iy$ فيكون $dz=dx+idy$ نعوض فنجد

$$= \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (x + iy)(dx + idy)$$

نجري التجويل $x = x(t) = 2t \ , y = y(t) = t$ فنجد

مثال: لتكن $f(z) = z + \frac{1}{z}$ حيث $= \int_0^1 (2t + it)(2 + i)\, dt = \frac{3}{2} + 2i0$

$$\gamma : z(t) = e^{\pi i t} , \qquad 0 \le t \le 1$$

من الواضح إن γ هي منحني أملس وإن

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 \pi i \left(e^{\pi i t} + e^{-\pi i t}\right) e^{\pi i t} dt = \pi i$$

(المحاضره :التاسعة عشر)

(متراجحة -ML) : لتكن f دالة مستمرة معرفة على مجموعة مفتوحة تحتوي على الكانتور C وأن $|f(z)| < M$ لكل $z \in C$ فإن

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML$$

حيث L طول الكانتور C

البرهان . ليكن Cمنحني أملس حيث $z(t): [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\left| \int_C f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)dt \right| \le \int_a^b \left|f\big(z(t)\big)\right| |z'(t)| dt$$

$$\le M \int_a^b |z'(t)| dt = ML.$$

فإذا كان $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ حيث γ_1 ملساء فإن

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j} f(z)dz\right| < \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{C_j} f(z)dz\right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} ML(C_j) = \sum_{j=1}^{n} ML(C)$$

مثال: ليكن C كانتور معطى بالصيغة من $z=2$ الى $z=2i$, $|z|=2$ إثبت أن

$$\left|\int \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leq \frac{6\pi}{7}$$

الحل . بما أن

$$|z+4| \leq |z|+4 = 6 \quad \text{و} \quad |z^3-1| \geq \left||z^3|-1\right| = 7$$

فإن

$$\left|\frac{z+4}{z^3-1}\right| = \frac{|z+4|}{|z^3-1|} \leq \frac{6}{7}$$

حيث ان $L=\pi$ و $M=\frac{6}{7}$ اذن

$$\left|\int \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leq \frac{6\pi}{7}$$

نظرية كوشي- كورسات (Cauchy-Goursat Theorem)

نفرض أن C هو كانتور مغلق بسيط $z=z(t)$, $a \leq t \leq b$
وبإتجاه عكس عقرب الساعة ولتكن الدالة f تحليلية عند كل نقطة من نقاط C داخل وعلى محيط C لذلك سيكون لدينا

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt$$

وإذا فرضنا أن $z(t)=x(t)+iy(t)$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
فإنه و بعد إجراء التكامل على القيمة الحقيقية t نستنتج

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \big(ux'(t)-vy'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \big(vx'(t)+uy'(t)\big)\,dt$$

ولهذا يكون بعد وضع $f(z)=u+iv$, $dz=dx+idy$

$$\int_C f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy \qquad (3)$$

ومن نتائج التفاضل والتكامل فإننا نستطيع تحويل تكامل المسار (3) إلى تكامل ثنائي باستخدام نظرية كرين والتي تنص على أنه إذا كانت الدوال الحقيقية $Q(x,y), P(x,y)$ مع مشتقاتها الجزئية الأولى مستمرة على جميع المنطقة المغلقة R التي تحوي على جميع النقاط الداخلية وعلى محيط الكانتور المغلق البسيط C فإنه

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y)dxdy$$

وبما أن الدالة f تحليلية في R لذلك تكون مستمرة داخل R ولهذا

$$\int_C f(z)dz = \iint_R (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_R (u_x - v_y)dxdy$$

وحيث أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة لذلك يكون لدينا

$$\int f(z)dz = 0$$

هذه النتيجة حصل عليها كوشي في القرن التاسع عشر وكما أسلفنا تعتبر من النتائج المهمة في التكامل العقدي.

مثال: إذا كان C كانتور مغلق بسيط فإن

$$\int_C e^{z^3} dz = 0$$

وذلك لأن الدالة تحليلية في جميع النقاط بالإضافة إلى أن $f'(z) = 3z^2e^{z^3}$ مستمرة كذلك .

وهنا تجدر الإشارة إلى أن العالم كورسات Goursat أول من برهن أن شرط الاستمرارية لـ f' يمكن إلغاءه أي ان f' للدالة التحليلية f لا يشترط أن تكون مستمرة وعليه تم تنقيح النتيجة التي حصل عليها كوشي بحذف شرط الإستمرارية للمشتقة f' وهذه النتيجة سميت نظرية كوشي-كورسات والتي سنعرضا في النظرية القادمة .

نظرية. إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال المتصل البسيط D ، C (كانتور مغلق بسيط) يقع داخل D فإن

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

البرهان . من نظرية كرين نجد أن

$$\int u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint (-v_x - u_y)dxdy = 0$$

وكذلك

$$\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D (u_x - v_y)dxdy = 0$$

لذلك ينتج لدينا

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0$$

مثال: ليكن C منحني بسيط مغلق ، ولتكن $f(z) = e^z$ لذلك وبما ان f دالة تحليلية على D فإنه حسب نظرية كوشي-كورسات

$$\int_C e^z dz = 0$$

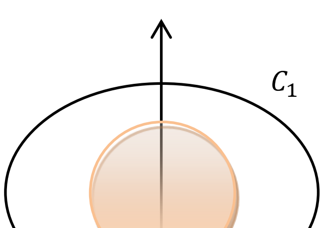
نتيجة . إذا كان كل من C_2, C_1 كانتور مغلق بسيط وبالإتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حيث C_2 يقع داخل C_1 والدالة $f(z)$ تحليلية على منطقة مغلقة تحتوي على C_2, C_1 وكل النقاط بينهما فإن

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

وهذه النتيجة تعطينا بأنه قيمة التكامل لا تتعلق بالطريق المسلوك مادام هذا الطريق هو مغلق وبسيط والدالة تحليلية على مجال يحتويه.

مثال: إحسب التكامل $\int_{C_1} \frac{dz}{z}$ حيث C_1 هو القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

الحل . الدالة $f(z)$ غير تحليلية عندما $z = 0$ لذلك من الممكن أن نختار C_2 هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١ أي أن $C_2: |z| = 1$ وكما هو موضح بالشكل



C_2

وهنا يمكن ملاحظة ما يلي:

١. المنحني C_2 يقع بأكمله داخل القطع الناقص C_1.

٢. الدالة $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة الواقعة بين C_2, C_1 .

٣. الدالة $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقطة من نقاط C_2, C_1 .

لذلك حسب النتيجة السابقة يكون لدينا

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

وبما أن $C_2: |z| = 1$ لذلك ليكن $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$
فإن

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta$$

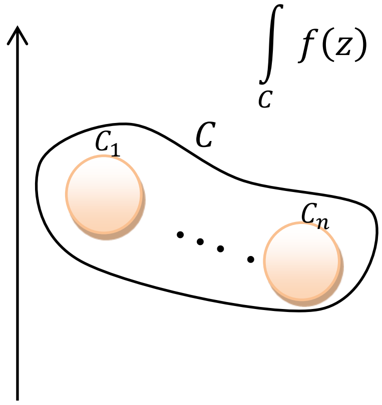
$$(i\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

ومنه يكون

$$\int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i$$

نظرية . ليكن $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة الواقعة بين المنحنيات $C_1, \dots, C_n$ والمنحني C وبشترط ان تكون C_k ، $(k = 1, \dots, n)$ غير متقاطعة مع بعضها وجميعها منحنيات بسيطة مغلقة وكذلك $f(z)$ تحليليـــــــة على المنحنيات $C_1, \dots, C_n$ عندئذٍ يكون

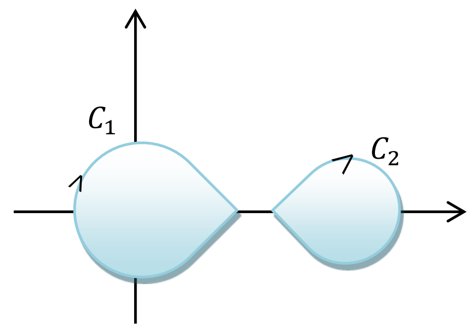
$$\int_C f(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0$$

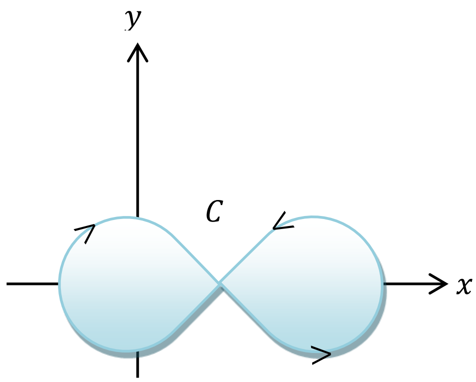


مثال: إثبت أن

$$\int_{c} \frac{z+3}{z^2-z} = 14\pi i$$

حيث C كانتور كما في الشكل(٤-٥)





الحل .

$$\int_{C} f(z)dz = -3\int_{C} \frac{1}{z}dz + 4\int_{C} \frac{1}{z-1}dz$$

لإيجاد التكامل الأول في الطرف الأيمن يكون

$$-3\int \frac{1}{z}dz = -3\int_{C_1} \frac{1}{z}dz + (-3)\int_{C_2} \frac{1}{z}dz = 3\int_{-C_1} \frac{1}{z}dz + 0 = 6\pi i$$

وبنفس الطريقة

$$4\int_{C} \frac{1}{z-1}dz = 4\int_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + 4\int_{C_2} \frac{1}{z-1}dz = 0 + 8\pi i = 8\pi i$$

لذلك يكون الناتج

$$\int f(z)dz = 6\pi i + 8\pi i = 14\pi i$$

(المحاضره : العشرون)

نظرية. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال D وكان $a, z \in D$ عندئذٍ يكون

$$F(z) = \int_{a}^{z} f(u)du$$

تحليلية في المنطقة D ويكون $F'(z) = f(z)$

البرهان . من الممكن استعمال الترميز

$$\int_C f(u)du = \int_a^z f(u)du$$

وليكن C_2, C_1 كانتورين في D لهما نفس نقطة البداية a والنهاية z
لذلك سيكون لدينا $C = C_1 - C_2$ منحني بسيط مغلق وباستخدام نظرية كوشي-كورسات ينتج لنا

$$\int_{C_1} f(u)du - \int_{C_2} f(u)du = \int_{C_1 - C_2} f(u)du = 0$$

ولبرهنة الجزء الثاني ، لتكن z نقطة ثابتة وليكن Δz صغيرة بما فيه الكفاية لذلك $z + \Delta z$ أيضاً تقع داخل D وبما ان z نقطة ثابتة فإن $f(z) = k$ حيث k ثابت وعليه يكون

$$\int_z^{z+\Delta z} f(z)du = \int_z^{z+\Delta z} kdu = k\Delta z = f(z)\Delta z$$

ومن الجهة الأخرى لدينا

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_a^{z+\Delta z} f(u)du - \int_a^z f(u)du$$

$$= \int_{C_1}^{a} f(u)du - \int_{C_2}^{a} f(u)du = \int_C f(u)du$$

حيث C كانتور يربط النقطة z مع $z + \Delta z$، C_1 يربط a مع z، C_2 يربط a مع $z + \Delta z$

وبما ان f دالة مستمرة عند النقطة z، إذن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن
إذا كان $|u - z| < \delta$ فإن $|f(u) - f(z)| < \varepsilon$
ومن المعادلات اعلاه يكون لدينا $|\Delta z| < \delta$ يؤدي الى ان

$$\left|\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_C f(u)du - \int_C f(z)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_C |f(u) - f(z)|du$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon$$

وعليه يكون الطرف الأيسر يذهب إلى الصفر عندما $\Delta z \to 0$ وهذا يعني $F'(z) = f(z)$
وبهذا ينتهي البرهان .

نظرية: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال D وكانت $F(z)$ هي أصل مشتقة لها عندئذٍ لأي منحني يصل بين النقطتين b, a حيث $a, b \in D$ يكون

$$\int_a^b f(z)dz = F(z)|_a^b = f(b) - f(a)$$

البرهان . من النظرية السابقة نستنتج أن $\int_a^b f(z)dz$ مستقل عن الطريق لأن

$$F(z) = \int_a^z f(u)du$$

تحليلية ولتكن G أصل مشتقة الدالة التحليلية f فإن

$$G(z) - F(z) = H(z)$$

تحليلية وأن $H'(z) = 0$ لكل $z \in D$ وعليه يكون $H(z) = k$ حيث k ثابت

و $G(z) = F(z) + k$

لذلك $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

وبهذا ينتهي البرهان .

مثال: إثبت أن

$$\int_1^i \sin z\, dz = \cos 1 - i \cosh 1$$

الحل . أصل المشتقة للدالة $f(z) = \sin z$ هي $F(z) = -\cos z$

لذلك

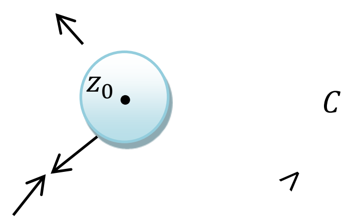
$$\int_1^i \sin z\, dz = -\cos i + \cos 1 = \cos 1 - i \cosh 1$$

صيغة كوشي التكاملية (Cauchy Integral Formula)

ليكن C كانتور مغلق بسيط بالإتجاه الموجب ولتكن f دالة تحليلية على منطقة بسيطة الإتصال D تحوي C ولتكن z_0 أي نقطة داخلية تقع داخل C فإن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

البرهان . الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ دالة تحليلية في D ما عدا عند النقطة z_0 ومن نتيجة مبرهنة كوشي-كورسات بأن التكامل على



المنحني C هو نفسه على المنحني C_r حيث
$C_r\colon |z-z_0|=r$

أي أن

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

من الممكن كتابة الطرف الأيمن كالآتي

$$\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{C_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz+\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$=f(z_0)\int_{C_r}\frac{dz}{z-z_0}+\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=f(z_0)2\pi i+\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

إذا ما أخذنا $r\to 0$ فإن المعادلة أعلاه تكون

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)2\pi i+\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

لتكن $M_r=\max\{\int|f(z)-f(z_0)|: z\in C_r\}$
وبما ان f دالة مستمرة ومن الواضح $M_r\to 0$ عندما $r\to 0$
لذلك نستنتج ان

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|=\frac{|f(z)-f(z_0)|}{z-z_0}\le\frac{M_r}{r}$$

إذن هذا يقابل

$$\left|\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\le\frac{M_r}{r}L(C_r)=2\pi M_r$$

وعليه

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=0$$

وبهذا نستنتج أن

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

وبهذا ينتهي البرهان

مثال: إحسب $\int_C \frac{z^2+1}{z}dz$ حيث $C: z(t) = e^{it}$ وأن $0 \leq t \leq 2\pi$

الحل . الدالة $f(z) = z^2 + 1$ دالة تحليلية على المستوي العقدي $\mathbb{C}$

وأن $z_0 = 0$ نقطة تقع داخل الكانتور C

لذلك باستخدام صيغة كوشي التكاملية فإننا نستنتج

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2+1}{z}dz$$

ومنه

$$\int \frac{z^2+1}{z}dz = 2\pi i[1] = 2\pi i$$

مثال: إحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$ حيث C دائرة $|z-2| = 3$ بالإتجاه الموجب .

الحل . من الواضح $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ دالة تحليلية وأن $z_0 = 0$ تقع داخل C

لذلك باستخدام صيغة كوشي التكاملية فإننا نستنتج

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$$

ومنه

$$\int \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = 2\pi i\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{-\pi i}{3}$$

مثال: إحسب $\int_C \frac{z^2e^z}{z-\pi i}dz$ حيث $C: z(t) = e^{it} + \pi i$ وأن $0 \leq t \leq 2\pi$

الحل . الدالة $f(z) = z^2e^z$ دالة تحليلية على المستوي العقدي $\mathbb{C}$

وأن $z_0 = \pi i$ نقطة تقع داخل الكانتور C كما في الرسم وحسب صيغة كوشي التكاملية فإن

y

$$\int_C \frac{z^2e^z}{z-\pi i}dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$= 2\pi i f(\pi i)$$

$$= 2\pi^3 i$$

ملاحظه: من صيغة كوشي التكاملية يمكن أن نستنتج أنه إذا كانت الدالة تحليلية عند نقطة فإن جميع مشتقات الدالة عند تلك النقطة تكون أيضا تحليلية .

(المحاضره: الحادية والعشرون)

نظرية . لتكن الدالة f تحليلية داخل وعلى الكانتور المغلق البسيط C وبالإتجاه الموجب ولتكن z أي نقطة داخلية للكانتور C فإن

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

البرهان . لتكن t أصغر مسافة بين z وجميع النقاط على C ومن نظرية كوشي التكاملية نستنتج ان

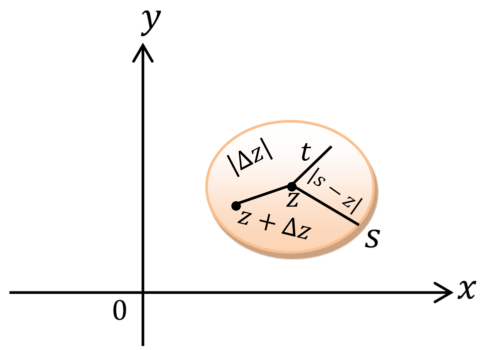
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{s-z}$$

حيث s نقاط على C.

لذلك يكون لدينا

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{s-z-\Delta z}-\frac{1}{s-z}\right)\frac{f(s)}{\Delta z}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)},$$



حيث $0 < |\Delta z| < t$

إذن يصبح لدينا

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Delta z f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}$$

وليكن M هو أكبر قيمة للدالة $|f(s)|$ على C

وبما أن $|\Delta z| < t \ , \ |s-z| \geq t$

فإن

$$|s-z-\Delta z| = |(s-z)-\Delta z| \geq \big||s-z|-|\Delta z|\big| \geq t-|\Delta z| > 0$$

وعليه يكون

$$\left|\int_C \frac{\Delta z f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}\right| \leq \frac{|\Delta z|M}{(t-|\Delta z|)t^2}L$$

حيث L طول الكانتور C

والآن بأخذ الغاية عندما $\Delta z \to 0$ نستنتج

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}=0$$

وبهذا ينتهي برهان النظرية.

مثال: إحسب $\int_C \frac{e^{z^2}dz}{(z-i)^2}$ حيث $C: |z| = 3$

الحل . بتطبيق النظرية السابقة يكون لدينا

$$\int_C \frac{e^{z^2}dz}{(z-2i)^2} = 2\pi i f'(2i)$$

حيث $f(z) = e^{z^2}$

لذلك

$$\int_C \frac{e^{z^2}dz}{(z-2i)^2} = 2\pi i\left(4ie^{4i^2}\right)$$
$$= -8\pi e^{-4}$$

نظرية. لتكن فإن f دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال D وليكن C كانتورمغلق بسيط بالإتجاه الموجب ويقع داخل D وإذا كانت z نقطة داخلية للمنحني C

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$$

البرهان . في حالة $n = 1$ فقد تم برهانها في النظرية السابقة.
وهنا سنستخدم نفس القيم للدالة التحليلية f' ونبرهن f'' أي عندما $n = 2$ وبإستخدام الإستقراء الرياضي نستطيع البرهنة لإي عدد n .

مثال: إحسب $\int_C \frac{e^{2z}}{z^n}dz$ حيث C دائرة الوحدة $C: |z| = 1$

الحل . بإستخدام النظرية السابقة فإن

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z^n}dz = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-0)^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!}f'''(0) = \frac{8\pi i}{3}$$

نظرية . إذا كانت f دالة تحليلية عند نقطة فإن مشتقاتها من الرتبة n موجودة عند تلك النقطة وتكون جميعها تحليلية.

البرهان . لتكن f تحليلية في المنطقة D ولتكن $z_0 \in D$
فإنه يوجد قرص مغلق $|z-z_0| \leq R$ محتواة في D الدائرة C حيث $C: |z-z_0| = R$ ممكن إستخدامها في النظرية السابقة لإثبات أن $f^n(z_0)$ موجود لكل n.

نظرية موريرا Moreira's Theorem

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال D وإذا كانت $\int_C f(z)dz = 0$ حيث C كانتور مغلق بسيط يقع في D فإن الدالة f تحليلية على D.

البرهان . بما أن الدالة مستمرة وأن $\int_C f(z)dz = 0$
إذن f لها أصل مشتقة F داخل D وهذا يعني $F'(z) = f(z)$ لكل $z \in D$ وهذا يؤدي أن الدالة $F(z)$ تحليلية ومن النظرية السابقة فإن $F'(z)$ أيضاً تحليلية
إذن $f(z)$ تحليلية .

نظرية (متراجحة كوشي) Cauchy Inequality

لتكن الدالة f تحليلية داخل وعلى الدائرة C_R نصف قطرها R ومركزها z_0 وبالإتجاه الموجب فإذا كان $|f(z)| \leq M$ لكل $z \in C_R$, M عدد حقيقي موجب فإن

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!\,M}{R^n} \qquad , n = 1,2,\ldots$$

البرهان . من النظرية السابقة لدينا

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$$

وبما ان $|f(z)| \leq M$ لكل z تقع على الكانتور C_R وأن $|s-z| = R$ لذلك يكون لدينا

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\int |ds|$$

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{n!\,M}{R^n}$$

والآن سوف نبرهن النتيجة الآتية.

نظرية ليوفيل (Liouvill's Theorem). إذا كانت الدالة f كلية ومقيدة فإن f دالة ثابتة .

البرهان . لتكن f دالة تحليلية ومقيدة بعدد حقيقي موجب M على المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وبواسطة متراجحة كوشي في حالة $n = 1$ نستنتج أن $|f'(z)| \le \frac{M}{R}$ لكل $z \in \mathbb{C}$ ولكل $R > 0$

لندع $R \to \infty$ لذلك سنجد أن $f'(z) = 0$ لكل z وهذا يؤدي f دالة ثابتة.

(المحاضره: الثانية والعشرون)

نظرية. لتكن الدالة f تحليلية داخل منطقة بسيطة الإتصال D التي تحوي على الدائرة $C: |z - z_0| = R$ فإن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta$$

البرهان . المعادلة الوسيطية للدائرة C تأخذ الشكل الآتي

$$z(\theta) = z_0 + Re^{i\theta} \quad , \qquad dz = iRe^{i\theta} d\theta$$

لكل $0 \le \theta \le 2\pi$ وبإستخدام صيغة كوشي التكاملية نحصل على

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta} d\theta}{Re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta$$

والآن نعود غلى نظريتنا الأساسية لبرهنتها

برهان النظرية . لنفرض أنه يوجد z_0 في D بحيث أن $|f(z)| \le |f(z_0)|$ لكل $z \in D$ فإذا كان $C_0: |z - z_0| = R$ أي دائرة موجودة داخل D، فإن لكل $0 \le r \le R$

$$(4) \qquad |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

لكن من الواضح أن $|f(z)| = \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|$ دالة حقيقية بمتغير حقيقي θ وهذا يعطينا بأن لكل $0 \le r \le R$ فإن

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|d\theta = |f(z_0)|$$

وبالمقارنة بين (٤) ، (٥) فإن

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

ومن الممكن كتابتها بالصيغة

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0)| - \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta = 0$$

وبما أن الدوال حقيقية ومن معلوماتنا في التفاضل والتكامل للدوال الحقيقية

إن تكامل الدالة غير السالبة المستمرة على فترة ويساوي صفر فإن الدالة يجب أن تكون دالة صفرية وعليه نستنتج أن لكل $0 \le r \le R$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ فإن

$$|f(z_0)| = \left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|$$

فإذا كان مقياس الدالة التحليلية ثابتاً فهذا يؤدي إلى إن الدالة ثابتة.

ولذلك لكل z في القرص $D_0\colon |z - z_0| \le R$ فإن

$$(6) \qquad f(z) = f(z_0)$$

الآن لتكن $\mathbf{z}$ نقطة عشوائية في D وليكن C كانتور في D يربط بين $\mathbf{z}$ ، z_0 ولتكن $2t$ هي أقل مسافة من C إلى حدود D لذلك سيكون لدينا

$$|z_{k+1} - z_k| \le t$$

حيث

$$k = 0,1,\dots,n \quad \text{لكل} \quad D_k\colon |z - z_k| \le t$$

محتواة في D وعلى C كما موضح بالشكل ونلاحظ أن $z_1 \in D_0$ وذلك لأن D_k يحتوي على المركز z_{k+1} للقرص D_{k+1}

ومن المعادلة (٦) نجد أن $f(z_1) = f(z_0)$ وهنا $|f(z)|$ أيضاً لها قيمة عظمى عند z_1 وبهذا يؤدي إلى أن

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0)$$

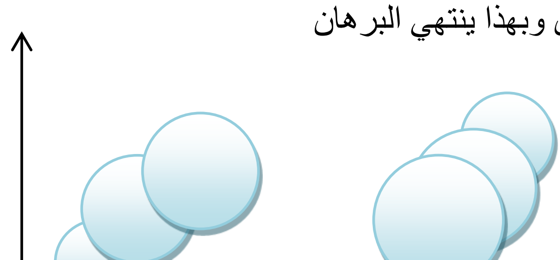
وبتكرار هذه العملية نجد إن ولكل $z \in D_{k+1}$

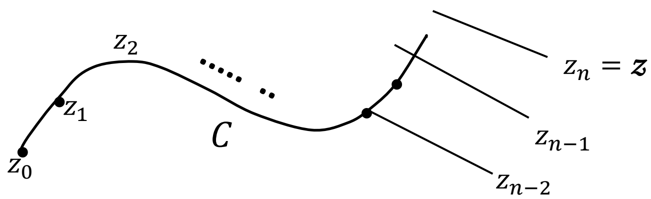
$$f(z) = f(z_{k+1}) = f(z_k)$$

وعليه نستنتج أن

$$f(\mathbf{z}) = f(z)$$

لذلك تكون f دالة ثابتة في D وهذا متناقض مع الفرض وبهذا ينتهي البرهان





نظرية القيمة العظمى Maximum Value Theorem

إذا كانت الدالة f تحليلية وليست ثابتة في المجال D فإن $|f(z)|$ ليس لها قيمة عظمى في D إي أنه لا توجد z_0 في D بحيث إن $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ لكل $z \in D$.

مثال: جد القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ حيث $f(z) = \sin z$ في المنطقة المتصلة

$$D = \left[z: 0 \leq Re\, z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq Im\, z \leq 1\right]$$

الحل . من الواضح أن الدالة لا تأخذ قيمة عظمى على النقاط داخل D وذلك لأن الدالة $|f(z)|$ ليست ثابتة بل تأخذ قيمة عظمى على إحدى النقاط الحدودية للمنطقة D.

بما أن

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

فإن

$$|\sin z|^2 \leq 1 + \sinh^2 1 = \cosh^2 1$$

لذلك تكون القيمة العظمى $z = \frac{\pi}{2} + i$ وهي $\cosh 1$

Homeork

١- احسب التكامل التالي

$\int_C \bar{z}dz$ حيث C هو الدائرة $z = |3|$ وباتجاه عكس عقرب الساعة

٢- احسب التكامل $\int_C |z^2|dz$ حيث $C: z(t) = t + it^2$ لكل $0 \le t \le 1$

٣- احسب التكامل الاتي $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ حيث C هو قوس الدائرة $|z| = 1$ الواقع في نصف المستوي العلوي .

٤- لتكن f دالة مستمرة على دائرة نصف قطرها R ومركزها z_0 ولتكن الدائرة C لها معادلة وسيطية هي $C: z(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ ، اثبت ان

$$\int_C f(z)dz = iR\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

٥- اثبت ان $\left|\int_C \frac{e^{iz}}{z^2-1}dz\right| \le \frac{12\pi}{5}e^z$ حيث $C: = |z| = \frac{3}{2}$

٦- لتكن $f(z) = Log(z+5)$ كيف تجعل قيمة التكامل الاتي يساوي صفرا $\int_C f(z) = 0$

٧- احسب قيمة التكامل الاتي $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ حيث

ا- $C: |z-2| = 3$ ب- $C: |z-2| = 5$

٨- لتكن f دالة تحليلية داخل $|z| < 5$ وان $|f(z)| \le 10$ لكل قيم z على الدائرة $|z-1| = 2$.جد

ا- $|f^3(1)|$ ب- $|f^3(0)|$

٩- لتكن f دالة كلية حيث $|f(z)| \ge 1$ لكل قيم z . اثبت ان f دالة ثابتة.

(المحاضره: الثالثة والعشرون)

المتتابعات Sequence

تعريف . تكون المتتابعة $\langle z_n\rangle$ متقاربة للعدد z_0 إذا تحقق الشرط الآتي :
لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث أن $|z_n - z_0| < \varepsilon$ لكل $n > n_0$ وتكتب بالشكل $lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ وإذا لم تكن متقاربة فإنها متباعدة.

مثال: تكون المتتابعة $\langle z_n\rangle = \langle z^n\rangle$ حيث $|z| < 1$ متتابعة متقاربة أما في حالة $|z| > 1$ فإن المتتابعة تكون متباعدة.

مثال٢: إثبت أن $lim_{n\to\infty}\frac{i^n}{n} = 0$

الحل . لتكن $\varepsilon > 0$ ، نختار $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ لذلك يكون لدينا لكل $n > n_0$ ،

$$\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

نظرية. لتكن $z_n = x_n + iy_n$, $(n = 1,2,\dots)$, $z = x + iy$ فإن

$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

البرهان . نفرض اولاً أن $lim_{n\to\infty} z_n = z$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد طبيعي n_0 بحيث ان

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \varepsilon \qquad \forall\, n > n_0$$

ولكن

$$|x_n - x| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|,$$
$$|y_n - y| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$|x_n - x| < \varepsilon \;, \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0$$

ولبرهنة الإتجاه الآخر لنفرض أن الشرط الثاني يتحقق لذلك نفرض أن $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد n_2, n_1 اعدادطبيعية بحيث أن

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_1$$

و

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > n_2$$

ليكن $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ فإن

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y|$$

وعليه نستنتج أن

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\, n > n_0.$$

من خلال النظرية ٥-١ فإن الصيغة الآتية دائما صحيحة

$$\lim x_n + iy_n = \lim x_n + i \lim y_n$$

مثال: إثبت أن $\langle z_n \rangle = \langle \frac{n+i(n+3)}{n+1} \rangle$ متقاربة.

الحل . لنعيد كتابة المتتابعة

$$z_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{n+3}{n+1}$$

لذلك

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + \lim_{n\to\infty} i\frac{n+3}{n+1}$$
$$= 1 + i$$

مثال: إثبت أن $\langle z_n \rangle = \langle \frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} \rangle$.متقاربه الى z =2+i

الحل:

لتكن $0 < \varepsilon$يجب ان نجد k
تنتمي الى N بحيث

$$|z_n - z| < \varepsilon, \forall n > K$$

$$|z_n - z| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i)\right|$$
$$= \left|\frac{2n-1}{n} - 2 + i\left(\frac{n+2}{n} - 1\right)\right|$$
$$= \left|\frac{-1}{n} + i\frac{2}{n}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{n}$$

$$\therefore \forall \in > 0 \ \exists \ \mathbf{K} \in \mathbf{N} \ni \frac{\sqrt{5}}{n} < \in \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\in} < \mathbf{n}$$

$$\therefore \ \mathbf{K} = \frac{\sqrt{5}}{\in}$$

المتسلسلات Series

تعريف. لتكن $\langle z_n \rangle$ متتابعة عقدية عندئذٍ يسمى المجموع

$$S = z_1 + \cdots + z_n$$

بمتسلسلة عقدية لانهائية ونرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

فإذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\langle S_n \rangle$ متقاربة في S فإن المتسلسلة $\sum z_n$ متقاربة أما إذا كانت $\langle S_n \rangle$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum z_n$ متباعدة.

مثال: إبحث في تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

الحل . أولاً نجد متتابعة المجاميع الجزئية

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

نضرب الطرفين بـ z غير أن

$$zS_n = z + z^2 + \cdots + z^n$$

بالطرح نحصل على

$$S_n - zS_n = 1 - z^n$$

$$S_n(1 - z) = 1 - z^n$$

إذن

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^n}{1 - z}$$

والآن نأخذ الغاية للطرفين فيكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - z} - \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1 - z}$$

وعندما $|z| < 1$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - z} - 0 = \frac{1}{1 - z}$$

إذن المتسلسلة متقاربة ومجموعها هو

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \qquad , |z| < 1$$

نظرية. لتكن $z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1,2, \dots)$ ولتكن $S = x + iy$ فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

إذا وفقط إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \; , \; \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

البرهان . لتكن $S_N = X_N + iY_N$ حيث

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad , \qquad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$$

لذلك يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

متحققة إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

وبواسطة النظرية (٥-١) نجد أن $lim_{N\to\infty} X_N = X \; , \; lim_{N\to\infty} Y_N = Y$
ولبرهنة الإتجاه الآخر ، بما أن Y_N, X_N مجاميع جزئية للمتسلسلتان

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

وبهذا ينتهي البرهان.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

نلاحظ من النظرية (٥-٢) أن

عندما تكون المتسلسلتان في الطرف الأيمن متقاربة.

مثال: ناقش تقارب المتسلسله

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2^{i}}{3^{\mathrm{i}}}$$

الحل: ان المجموع الجزئي للمتسلسله

$$S_n = 2i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+.........+\frac{1}{3^n}\right)$$

يؤلف سلسلة هندسية حدها الأول $\frac{2i}{3}$ **وأساسها (Ratio)** $\frac{1}{3}$ **ومجموعها** $S=\dfrac{2i/3}{1-\frac{1}{3}}=i$

إذا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2i}{3^n}$ **تقترب نحو** i**.**

(المحاضره: الرابعة والعشرون)

إخــتبار النــسـبة Ratio Test.

لتكن $\langle z_n \rangle$ متتابعة معقدة بحيث أن

$$P = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$$

حيث P عدد حقيقي موجب فإن

أ- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة إذا كانت $P < 1$

ب- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متباعدة إذا كانت $P > 1$

ج- الإختبار يفشل إذا كانت $P = 1$

مثال: أدرس تقارب المتسلسلات الاتية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n+2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)^n}{n!\,(e-2i)^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)^n}{n!\,(e)^n}$$

الحل . نجري إختبار النسب

$$P = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^{n+1}}{n+3}\cdot\frac{n+2}{(1+i)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}|1+i|\right) = |1+i| = \sqrt{2} > 1$$

إذن المتسلسلة متباعدة.

ايضا نجري اختبار النسب على المتسلسلة الثانية فيكون لدينا

$$P = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!\,(e-2i)^n(e-2i)}\cdot\frac{n!\,(e-2i)^n}{(n)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{(n)^n}\left|\frac{1}{(e-2i)}\right|\right) = \frac{e}{(\sqrt{(e)^2+4})} < 1$$

اما المتسلسلة الاخيره فان هذا الاختبار سيفشل لان قيمة P=1

إخـتـبار المقارنـــة Comparison Test

لتكن $\sum P_n$ متسلسلة معقدة حيث (P_n عدد حقيقي موجب) متقاربة وكانت $|z_n| \leq P_n$ لكل $n = 0,1,2,\dots$ فإن المتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ متقاربة.

مثال: إدرس تقارب وتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

الحل .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ متقاربة حسب اختبار ليبنتز

أما بالنسبة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ فإننا نقارنها مع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ فإن

$$lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}$$

إذن المتسلسلتان من نوع واحد أما متقاربتين او متباعدتين

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة لذلك يكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متباعدة وعليه فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$$

متباعدة أيضاً.

تعريف. لتكن $\langle f_n(z) \rangle$ متتابعة من الدوال العقدية معرفة على المجال المشترك D. نقول أن المتتابعة $\langle f_n(z) \rangle$ متقاربة موضعياً من الدالة $f(z)$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب k (يعتمد على k, ε) بحيث أن

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \;\; \forall\, n > k$$

بالإضافة إلى ذلك فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة موضعياً من الدالة f إذا كانت المتتابعة $\langle S_n(z) \rangle$ متقاربة موضعياً من الدالة f وأن $S_n = \sum_{m=0}^{n} f_m$.

تعريف.تكون المتتابعة $\langle f_n(z)\rangle$ متقاربة بانتظام على المجال المشترك D للدالة $f(z)$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي موجب $k(\varepsilon)$ يعتمد على ε فقط بحيث أن لكل $z \in D$ فإن

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \;\; \forall\, n > k$$

وكذلك تكون المتسلسلة $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على المجال المشترك D إذا كان $\langle S_n(z)\rangle$ متقاربة بانتظام على D.

نظرية. لتكن $\langle f_n(z)\rangle$ متتابعة من الدوال العقدية المستمرة على D فإذا كانت المتتابعة متقاربة من الدالة $f(z)$ بانتظام فإن $f(z)$ مستمرة على D.

البرهان . بما أن $\langle f_n(z)\rangle$ متقاربة بانتظام من $f(z)$ فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k(\varepsilon) > 0$ ولكل $z \in D$ فإن

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\; \forall\, n > k$$

وبما أن $f_n(z)$ دالة مستمرة على D فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k > 0$ فإذا كان

$$|z - z_0| < k \Longrightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\; \forall\, z_0 \in D$$

وعليه لكل $z_0 \in D$ فإن

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z_0) - f(z)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

لذلك تكون f مستمرة.

نظرية . لتكن $\{f_n(z)\}$ متتابعة من الدوال العقدية المعرفة على D المتقاربة بانتظام من $f(z)$ وليكن C كانتور بسيط يقع في D فإن

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz$$

البرهان . من التقارب المنتظم للمتتابعة $\{f_n(z)\}$ يكون لدينا ولكل $\varepsilon > 0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L} \;\; \forall\, z \in D$$

ومنه

$$\left| \int_C f_n(z)dz - \int_C f(z)dz \right| = \left| \int_C \big(f_n(z) - f(z)\big)dz \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{L(C)} L(C) = \varepsilon \qquad \big(\text{حسب متراجحة } ML\big)$$

حيث $L(C)$ طول الكانتور C.

نظرية . لتكن $\{f_n(z)\}$ متتابعة من الدوال التحليلية على D المتقاربة بانتظام من $f(z)$عندئذٍ يكون $f(z)$ دالة تحليلية على D.

البرهان . ليكن C كانتور (منحني بسيط مغلق) يقع في D عند

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int f_n(z)dz = 0$$

حسب مبرهنة كوشي وذلك لأن $f_n(z)$ تحليلية ولذلك تكون $f(z)$ تحليلية حسب مبرهنة موريرا.

إختبار فراشتراس (M-Test)

لتكن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ متسلسلة دوال معقدة في المجال المشترك D تحقق $|f_n(z)| \le M_n \;\; \forall\, n = 0,1,\dots$ لكل $z \in D$ حيث $\sum M_n$ متسلسلة حقيقية موجبة متقاربة للعدد M عندئذٍ تكـــون $\sum f_n(z)$ متقاربة بانتظام.

مثال: إبحث في تقارب المتسلسلة الآتية

$$\sum \frac{z^n}{n^2}$$

حيث $z \in D(0,1)$

الحل . نلاحظ أنه ولكل $z \in D(0,1)$ فإن

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

لتكن $M_n = \frac{1}{n^2}$ وبما ان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة

إذن حسب(M-Test) فإن $\sum \frac{z^n}{n^2}$ متقاربة بانتظام.

مثال: إبحث في تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n(n+1)}$$

الحل . حسب فيراستراس (M-Test) فإن

$$\left|\frac{\cos nz}{n(n+1)}\right| \le \frac{1}{n(n+1)} \qquad \forall\, z \in D$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة لذلك تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام.

(المحاضره: الخامسة والعشرون)

انواع المتسلسلات

١- متسلسلة القوى . Power Series

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n$ هي متسلسلة عقدية غير منتهية وتسمى متسلسلة القوى حيث C_n معاملات تنتمي إلـــى الأعداد العقدية و a هو يسمى مركز متسلسلة القوى وأيضاً عدد معقد وتحدد مناطق الإقتراب لمتسلسلة القوى بالإعتماد على معاملاتها وتعتبر حالة خاصة من متسلسلة الدوال الأساسية المهمة ولدراسة هذا النوع من المتسلسلات يجب أن نعرف كيف نحســـب نصف قطر التقارب ومن خلاله نتمكن من حساب المشتقات والتكامـــلات حد بعد حد ومن الواضـــح أيضاً أنه لكل متسلسلة قوى يوجد عدد حقيقي موجب R وتكون المتسلسلة متقاربة مطلقاً إذا كان $|z-a|<R$ ومتباعـــدة في حالـــة $|z-a|>R$، أما في حالة $|z-a|=R$ فإن في هذه الحالة المتسلسلـــة أما تكون متقاربة أو تكـــون متباعدة وان R يسمى نصف قطر التقارب ويجب أن يكون وحيد فإذا كانت المتسلسلة متقاربة فقط عندما $z=a$ فإن $R=0$ أما إذا كانت متقاربة في كل نقاط المستوي العقدي فإن $R=\infty$.

ويعطى نصف قطر التقارب R بالقانون الآتي :

$$R=\frac{1}{L}$$ حيث

١) $$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$$ في حالة وجود الغاية

2) $$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}$$ في حالة وجود الغاية

3) $$L=\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|C_n|}$$ هذه الغاية دائماً موجودة

مثال: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+2}}{n+1}$$

الحل . نجد النسبة الآتية

$$\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2}\right|$$

لذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1 \quad \text{وعليه فإن} \quad R = 1$$

مثال . جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(z+i)^n}$$

الحل . نجد قيمة $|C_n|^{\frac{1}{n}} = n + 1$
وهذا يؤدي إلى أن $(n+1) \to \infty$ عندما $n \to \infty$ لذلك باستخدام إختبار الجذر فإن نصف قطر التقارب $R = 0$
وهذا يعني أنها متقاربة فقط عندما $z = -i$.

مثال: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3-2n}{n+1}\right)^n$$

الحل . من الواضح أن المتسلسلة متقاربة لكل نقاط المستوي z (باستخدام اختبار الجذر) لذلك فإن $R = \infty$.

مثال: جد نصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4+(-1)^n)^n(z+2)^n$$

الحل . نلاحظ أن $C_n = (4+(-1)^n)^n$
لذلك يكون لدينا $C_n = (4-1)^n = 3^n$ في حالة n فردي
و كذلك $C_n = (4+1)^n = 5^n$ في حالة n زوجي
وفي هذه الحالة لايمكن حساب الغاية الإعتيادية ولكن يجب أن نحسب الغاية العليا حيث

$$\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{5^n} = 5$$

لذلك $R = \frac{1}{5}$ والمتسلسلة متقاربة في القرص $|z+2| < \frac{1}{5}$

الآن سنكتفي بإعطاء النظرية المهمة التالية وبدون برهان .

نظرية . لتكن R نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى فأن
أ. $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ تحليلية على دائرة C مركزها α ونصف قطرها R .
ب. إذا كان γ أي كنتور داخل الدائرة C و $g(z)$ دالة مستمرة على γ فإن

$$\int_{\gamma} g(z)S(z)dz = \int_{\gamma} g(z)\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n\,dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\gamma} g(z)(z-a)^n dz$$

وإذا كان $g(z) \equiv 1$ فإن

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\gamma} (z-a)^n dz$$

ج. $$S'(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n(z-a)^{n-1}$$

ونصف قطر التقارب للمشتقة هو أيضاً R.

نظرية. إذا كانت $|z| < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ متقاربة للدالة $f(z) = \frac{1}{1-z}$ أي أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^k + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

أما إذا كانت $|z| \geq 1$ فإن المتسلسلة متباعدة.

البرهان . نفرض أن $|z| < 1$ لذلك يجب أن نبرهن أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}$$

حيث $$S_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب الطرفين بالعدد z نحصل على

$$zS_n = z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n \qquad (2)$$

بطرح (٢) من (١) ينتج $(1-z)S_n = 1 - z^n$

لذلك $$S_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}$$

وبما أن $|z| < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$

لذلك $S_n = \frac{1}{1-z}$

أما إذا كانت $|z| \geq 1$ فمن الواضح أن $\lim_{n\to\infty} |z^n| \neq 0$ وعليه $\sum z^n$ متباعدة.

مثال: إثبت أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{2^n} = 1-i$$

الحل . لتكن $z = \frac{1-i}{2}$ لذلك يكون $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ لذلك يمكن تمثيله هذه المتسلسلة بمتسلسلة القوى وعليه يكون المجموع

$$\frac{1}{1-\frac{1-i}{2}} = \frac{2}{2-1+i} = \frac{2}{1+i} = 1-i$$

مثال: جد تمثيل لمتسلسلة القوى للدالة

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

الحل . بإيجاد المشتقة للدالة $\frac{1}{1-s}$ فإن

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-s}\right) = \frac{1}{(1-s)^2}$$

لذلك

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) \\ &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \end{aligned}$$

وهذا يعطينا بأن الدالة f يمكن تمثيلها بمتسلسلة القوى من خلال حساب المشتقة للمتسلسلة الهندسية $\frac{1}{1-s}$.

(المحاضره: السادسة والعشرون)

٢-متسلسلة تايلور .Taylor Series

في هذا المجال سوف نبرهن نظرية تايلور التي تعطي تمثيلاً (توسيعاً) للدالة التحليلية من خلال متسلسلة القوى غير المنتهية ولكل نقطة من نقاط الدالة التحليلية.

نظرية (نظرية تايلور) .Taylor Theorem

إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية داخل الدائرة C التي مركزها a ونصف قطرها R أي أن $|z-a| < R$ فإن f يمكن تمثيلها بالمتسلسلة

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n$$

المتقاربة لكل نقاط z داخل الدائرة C والمتقاربة بانتظام على $|z-a| \le r < R$ وتسمى هذه المتسلسلة بمتسلسلة تايلور للدالة $f(z)$ حول النقطة a.

z تقع داخل الدائرة C ولتكن d هي المسافة بين a, z أي أن $d = |z-a|$ من الواضح أن $0 \le d < R$.

ملاحظـــــــة: تسمى المتسلسلة حول النقطة $a = 0$ بمتسلسلة ماكلورين للدالة $f(z)$ وتكتب بالشكل

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

وهي حالة خاصة من متسلسلة تايلور.

اكتب المعادلة هنا.

نظرية . إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ متقاربة للدالة $f(z)$عند كل النقاط الداخلية للدائرة $|z-a| = R$ فانها تكون متسلسلة تايلور الموسعة للدالة f في القوى $z-a$.

البرهان . لتكن $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ حيث $|z-a| < R$

حسب فرضية النظرية دعنا نستخدم الدليل m داخل المجموع أي أن

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(z-a)^m \quad \text{حيث} \quad |z-a| < R$$

من المعروف لدينا وحسب دراستنا السابقة في هذا الموضوع فإن

$$\int_C g(z)f(z)dz = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_C g(z)(z-a)^m dz$$

حيث $g(z)$ أي دالة من الدوال

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \qquad (n = 0,1,2, \dots)$$

و C دائرة مركزها النقطة a ونصف قطرها أقل من R.

ومن صيغة كوشي التكاملية نجد أن

$$\int_C g(z)f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{f^n(a)}{n!}$$

إذن

$$\int_C g(z)(z-a)^m dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n-m+1}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

ومن الواضح أن

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_C g(z)(z-a)^m dz = C_n$$

وهذا ينتج لنا

$$\frac{f^n(z_0)}{n!} = C_n$$

وهذه هي متسلسلة تايلور عند النقطة a .

مثال . جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = e^z$

الحل .

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z, \qquad f(0) = 1 \\ f'(z) &= e^z, \qquad f'(0) = 1 \\ &\vdots \\ f^n(z) &= e^z, \qquad f^n(0) = 1 \end{aligned}$$

لذلك يكون لدينا

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

مثال ٢٢:

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة :

$$f(z) = (1-z)^{-2}$$

الحل

بما أن :

$$f^{(n)}(z) = (n+1)!(1-z)^{-(n+2)}, \; n = 0,1,2,\ldots,$$

فإن :

$$f^{(n)}(0) = (n+1)!$$

(المحاضره: السابعة والعشرون)

٣- متسلسلة لورانت Laurent series

تعريف. لتكن c_n أعداد معقدة لكل $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$. المتسلسلـــــــة غيرالمنتهية $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$تسمى متسلسلة لورانت وتعرف كالآتي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

بشرط المتسلسلة بالطرف الأيمن تكون متقاربة .

نظرية. لتكن $f(z)$ تحليلية في المجال الحلقي $R_1 < |z - z_o| < R_2$ فإن $f(z)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة لورانت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

حيث

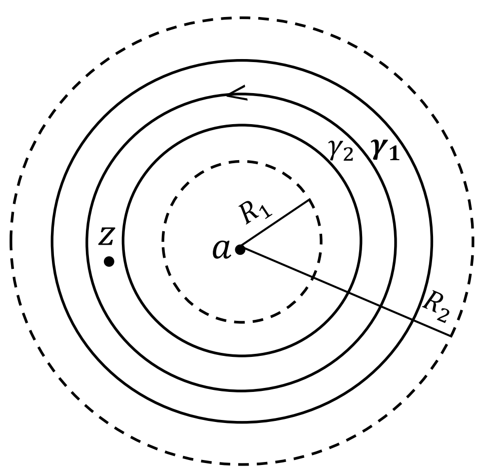
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \,, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta \,, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

و γ كانتور مغلق بسيط بالإتجاه الموجب حول النقطة a يقع داخل المجال الحلقي أعلاه .

المجموع الثاني لمتسلسلة لورانت يسمى الجزء الأساسي للمتسلسلة.

البرهان . نفرض γ_2, γ_1 كنتوران مغلقان بسيطان وبالإتجاه الموجب ويقعان داخل المجال الحلقي وأن النقطة z تقع خارج γ_2 وداخل γ_1 كما في الشكل



وباستخدام صيغة كوشي التكاملية

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta\right]$$

لكل $\zeta \in \gamma_2$ ، $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$ ،

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

والآن لكل $\zeta \in \gamma_2$ ، $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$،

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

لذلك يكون لدينا

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta-a)^n\, d\zeta\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}\, d\zeta \right) \frac{1}{(z-a)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

مثال . جد متسلسلة لورانت للدالة

$$f(z) = \frac{2}{2 - z - z^2}$$

في المجالات التالية :

$$|z| < 1 \qquad (1)$$

$$1 < |z| < 2 \qquad (2)$$

$$|z| > 2 \qquad (3)$$

الحل .

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{\frac{2}{3}}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{z}{2}}$$

إذا كانت $|z| < 1$ فإن

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

وإذا كان $|z| > 1$فإن

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

وإذا كان $|z| < 2$ فإن

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n}$$

وإذا كان $|z| > 2$ فإن

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{z}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{z^n}$$

لذلك يكون لدينا لكل $|z| < 1$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^n$$

والآن لكل $1<|z|<2$ نحصل على

$$f(z)=\frac{2}{3}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n})$$

أما في حالة $|z|>2$ فإننا نحصل على التمثيل الآتي

$$f(z)=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z^n}+\frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{z^n})$$

مثال . جد متسلسلة لورانت للمتسلسلة

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \quad \text{حول } 1$$

الحل .

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2+2(z-1)}}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{(z-1)^3}e^{2(z-1)}$$
$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}\left(1+2(z-1)+\frac{[2(z-1)]^2}{2!}+\frac{[2(z-1)]^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$$

مثال . جد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ في الكرة المثقوبةالذي مركزها $z=i$ بقوى $(z-i)$

الحل .

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{(z-i)+2i}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-i)}{2i}}$$

$$=\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{i}{2}\right)(z-i)}$$

$$=\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i}{2}(z-i)\right]^{n}$$

وتكون متقاربة إذا كان

$$\left|\frac{i(z-i)}{2}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1}$$

$$=\frac{-\frac{i}{2}}{z-i}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+2}(z-i)^{n}$$

ومتقاربة إذا كان

$$\left|\frac{i(z-i)}{2}\right|<1$$

$z\neq i$ أي أن $0<|z-i|<2$

مثال: ننعتبر الدالة $(z^2-3z+2)^{-1}$ تحليلية دوما بأستثناء:

$Z=1,2$ اوجد متسلسلة لورنت عللى كل من المناطق التاليه

(ا) $1 < |z| < 2$ (جـ) $|z| > 2$

(ب) $|z| < 1$ (د) $0 < |z-1| < 1$

الحل

(ا) على الحلقة $1 < |z| < 2$. بكتابة :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

ويمكن فك الكسور على الشكل :

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

حيث $|z/2| < 1$ و $|1/z| < 1$ وعليه فإن :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(ب) عندما يكون $|z| < 1$ يمكن فك التعبير على النحو :

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

وبالتالي :
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n}, \quad |z|<1$$

(جـ) نلاحظ أن :

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^{n}, \quad 2<|z|$$

(د) على الحلقة $0<|z-1|<1$ ، نحصل على :

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n}$$

وبالتالي على الحلقة $0<|z-1|<1,$ يكون :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^{n}$$

(المحاضره: الثامنة والعشرون)

النقاط الشاذة والأصفار والأقطاب Poles ,Zeroes and Singular points

إعادة تعريف النقطة الشاذة وهي تلك النقطة التي تكون الدالة عندها غير تحليلية وتقسم إلى قسمين النقطة الشاذة المعزولة وغير المعزولة .

تعريف. تسمى النقطة الشاذة z_o معزولة إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون الجوار $0 < |z - z_o| < \varepsilon$ لايحوي على نقاط شاذة أخرى غير z_o أما إذا لم يتحقق هذا فإن z_o نقطة شاذة غير معزولة بمعنى آخر تكون هناك عدد غير منته من النقاط الشاذة للدالة.

ملاحظـــة. إذا كانت النقاط الشاذة معدودة منتهية فالنقطة الشاذة تكون معزولة Isolated .

مثال. الدالة

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z^2+4)}$$

لها نقاط شاذة هي $z = 0$, $z = \mp 2i$ وهذه النقاط معزولة.

مثال . الدالة

$$f(z) = \frac{1}{sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

لها نقاط شاذة غير معزولة ولمعرفة ذلك دعنا نجد هذه النقاط كالآتي

$$sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} = \pi n$$

وهذا يؤدي إلى أن $z_n = \frac{1}{\pi n}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

لهذا فإن $z = 0$ نقطة شاذة غير معزولة وإذا وضعنا $\frac{1}{z}$ بمكان z لحصلنا على $z_n = \pi n$

ومهما أخذنا جوار للغاية ∞ فإنه يوجد هناك نقاط شاذة لذلك لا نستطيع عزل ∞ لذلك تكون نقطة شاذة غير معزولة .

تعريف . لتكن للدالة f نقطة شاذة معزولة a مع متسلسلة لورانت

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)$$

لذلك يمكن تصنيف هذه النقطة كالاتي :

أ - إذا كان $c_n = 0$ لكل $n = -1, -2, \ldots$ فإن f لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند a. (Removable)

ب- لكل k عدد صحيح موجب بحيث أن $c_{-k} \neq 0$ ، $c_n = 0$ لكل $n = -k-1, -k-2, \ldots$ فإن f لها قطب من الرتبة k عند a وإذا كان $k = 1$ فإن f. لها قطب بسيط .(Simple pole)

جـ إذا كان $c_n \neq 0$ لكل عدد صحيح سالب غير منتهٍ n فإن f لها نقطة شاذة أساسية عند a . (Essentially)

مثال . لتكن $f(z)$ دالة معرفة كالآتي

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z+1}$$

نلاحظ أن $z = -1$ نقطة شاذة.

وإذا كتبنا

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{z+1} = z-1$$

فعليه تكون النقطة الشاذة $z = -1$ نقطة شاذة قابلة للإزالة .

مثال . لتكن $f(z)$ دالة معرفة كالآتي

$$f(z) = \frac{cos\, 2z - 1}{z^2}$$

النقطة الشاذة المعزولة $z = 0$ ، متسلسلة لورانت لهذه الدالة تكون كالآتي

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(-\frac{4z^2}{2!} + \frac{16z^4}{4!} - \frac{64z^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= -2 + \frac{2z^2}{3} - \frac{64z^4}{6!} + \cdots$$

لذلك تكون النقطة الشاذة $z = 0$ قابلة للإزالة .

مثال. لتكن

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$$

النقطة الشاذة $z = 0$ تكون أساسية وذلك لأن

متسلسلة لورانت للدالة هي

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-n}}{n!}$$

وبما أن $c_n \neq 0$ لكل $n = -1, -2, \ldots$ فإن $z = 0$ نقطة شاذة أساسية .

تعريف .الدالة التحليلية $f(z)$ يقال لها تملك صفراً من الرتبة k عند النقطة a إذا كان لكل $n = 0,1, \ldots, k-1$ فإن

$f^n(a) = 0$ و $f^k(a) \neq 0$

وإذا كان $k = 1$ فإن f لها صفراً بسيطاً.

نظرية . لتكن $f(z)$دالة تحليلية عند z_o فإنه يوجد لها صفر من الدرجة (الرتبة) k إذا وفقط إذا وجدت دالة $g(z)$ عند z_o بحيث $g(z_o) \neq 0$ وتحقق

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z)$$

البرهان . بما أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند z_o فإنه يوجد لها متسلسلة تايلور تقترب عند z_o وهذا يعني

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_o)^n$$

وإذا كانت z_o صفر للدالة من الرتبة k فإن

$$f(z_o) = f'(z_o) = \cdots = f^{k-1}(z_o) = 0, \qquad f^k(z_o) \neq 0$$

وبالتالي تصبح المتسلسلة

$$\begin{aligned} f(z) &= c_k (z - z_o)^k + c_{k+1} (z - z_o)^{k+1} + \cdots \\ &= (z - z_o)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n} (z - z_o)^n \end{aligned}$$

فإذا وضعنا $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n} (z - z_o)^n$ فإن

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z)$$

الإتجاه الثاني في البرهان (يترك كتمرين للطالب)

(المحاضره: التاسعة والعشرون)

نظرية. لتكن $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o , $g(z_o) \neq 0$ ولتكن $m \geq 1$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_o)^m}$ فإن z_o قطب من الدرجة m للدالة $f(z)$.

(هذه النظرية توضح العلاقة بين الصفر للدالة من الدرجة m والقطب أيضاً من الدرجة m)

البرهان . لتكن $g(z)$ دالة تحليلية لذلك حسب مفكوك تايلور للدالة يكون

$$g(z) = c_{\cdot} + c_1(z - z_o) + c_2(z - z_o)^2 + \cdots$$

حيث $c_{\cdot} = g(z_o) \neq 0$

إذن

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_o)^m} = \frac{c_{\cdot}}{(z - z_o)^m} + \frac{c_1}{(z - z_o)^{m-1}} + \cdots + c_m + c_{m+1}(z - z_o) + \cdots$$

مثال . جد أصفار وأقطاب الدالة $f(z) = \frac{\cot z}{z}$ ثم صنفها.

الحل . بما أن

$$f(z) = \frac{\cos z}{z \sin z}$$

وبفرض أن $\cos z = 0$ يؤدي إلى أن $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

وبما أن $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \neq 0$

وهذه تمثل $\cos'\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \neq 0$

لذلك يكون لهذه الدالة صفراً بسيطا عند النقاط $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\,,\ n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

الآن بالنسبة للأقطاب نضع $z \sin z = 0$ وهذا يتحقق عندما تكون $z = n\pi \ , n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ و z=0 و وبما أن $\cos(n\pi) \neq 0$ الذي يمثل $\sin'(n\pi) \neq 0$ لذلك تكون لهذه الدالة قطباً بسيطاً عند $z = n\pi, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

بالاضافة الى ذلك فان الدالة تحليلية عند الصفر وغايتها لاتساوي صفرا عندما($z \to 0$)

مثال . جد أصفار الدالة $f(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$

الحل . لإيجاد أصفار هذه الدالة تكون

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

ومن العلاقة

$$\sin(iz) = i \sinh z$$

لذلك نجد أنه

$$sin\left(\frac{i}{z}\right) = 0 \implies \frac{i}{z} = n\pi$$

وأن جذور (أصفار) هذه الدالة يكون $z_n = \dfrac{i}{n\pi}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

وبما أن المشتقة الأولى غير صفرية عند هذه الأصفار لذلك كلها تكون أصفار بسيطة.

نظرية . لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ولها صفرمن الرتبة k عند $z = z_0$ فإن $\dfrac{1}{f(z)}$ لها قطب من الرتبة k عند $z = z_0$ أيضاً.

البرهان . بما أن $f(z)$ لها صفر من الرتبة k عند z_0 فإن

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z) \qquad (6)$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o , $g(z_o) \neq 0$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k} \cdot \frac{1}{g(z)} \qquad (7)$$

من (٦) وبإستخدام ضرب كوشي فإن متسلسلة تايلور تكون

$$\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots$$

وعليه تكون

$$(a_0 + a_1(z - z_o) + \cdots)(b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots) = 1$$

وبالتعويض في (٧) تكون

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k}(b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots)$$

حيث $b_0 \neq 0$

لذلك $\dfrac{1}{f}$ لها قطب من الدرجة k.

نظرية . إذا كان $f(z)$ لها قطب من الدرجة k عند z_o فإن $\dfrac{1}{f}$ لها نقطة شاذة معزولة عند z_o وإذا عرفنا $\dfrac{1}{f(z_o)} \neq 0$ فإن $\dfrac{1}{f}$ لها صفر من الدرجة k عن النقطة z_o.

البرهان . بما ان الدالة $f(z)$ لها قطب من الدرجة k عند z_o فإنه يوجد دالة تحليلية $g(z)$ عند z_o وأن $g(z_o) \neq 0$ حيث

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_o)^k} \qquad (8)$$

ومن العلاقة (٨) يمكن إيجاد مفكوك تايلور للدالة $\dfrac{1}{g(z)}$ كالآتي

$$\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots$$

لذلك تكون

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k} \cdot \frac{1}{g(z)}$$
$$= (z - z_o)^k \cdot (b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots)$$

وبالتالي يكون z_o صفراً من الرتبة k للدالة $\frac{1}{f}$ بشرط $\frac{1}{f(z_o)} \neq 0$, z_o نقطة شاذة قابلة للإزالة .

نتيجة . إذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دوال تحليلية مع أصفارمن الرتبة n, m على الترتيب عندz_o فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ تكون كالآتي

١- إذا كان $m > n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_o وتمثل صفراً من الدرجة $m - n$ للدالة $\frac{f(z)}{g(z)}$.

٢- إذا كان $m < n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها قطب من الرتبة $n - m$ عند z_o.

٣- إذا كان $m = n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_o.

ونستطيع تعريفها لذلك $\frac{f(z)}{g(z)}$ تحليلية عند z_o بواسطة

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_o)}{g(z_o)}$$

مثال . لتكن الدالة

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sin z}{z \cos z}$$

ومن المعروف لدينا أن $\sin z = 0$ عندما $z = n\pi$ حيث $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

وبما أن $f'(n\pi) \neq 0$ فإن صفر الدالة f يكون بسيط وبنفس الطريقة يمكن أن نعرف بأنه $g(z) = z \cos z$ لها أصفار بسيطة عند $z = 0$ وكذلك $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ حيث $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

لذلك من النتيجة السابقة فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها السلوك الآتي:

١- لها أصفار بسيطة عند $z = n\pi$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

٢- لها أقطار بسيطة عند $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

٣- تحليلية عند ٠ وأن $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)}$.

Homework

١- جد الغايات الاتية

ا- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+in^3}{n^3-1}$ ب- $\lim_{z\to 0}(\frac{1}{z}-\cot z)$

٢- لتكن $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. اثبت ان $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z_0}$

٣- ادرس تقارب المتسلسله الاتية ثم جد مجموع المتسلسلة المتقاربة

ا- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{2^n}$

٤- جد نصف قطر التقارب للمتسلسلات الاتية

ا- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+5)z^n}{(2n+1)}$ ب- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3(z+i)^n}{(3)^n}$

٥- جد منطقة تقارب المتسلسله الاتية ثم جد مجموعها

ا- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(z-1)^n}$

٦- جد تمثيلا لمتسلسلة القوى للداله الاتية

$$f(z) = cot^{-1}z$$

٧- جد متسلسلة تايلور للداله الاتيه

$f(z) = Log\ z$ حول النقطة $z_0 = -1 + i$.

٨- جد متسلسلة ماكلورين للداله الاتية

$f(z) = \ln(1+z)$.

٩- هل من الممكن تمثيل الدالة $f(z) = Log\ z$ بمتسلسلة ماكلورين او لورانت حول النقطة $a = 0$؟ وضح اجابتك.

١٠- جد متسلسلة لورانت للدالة $f(z) = \frac{\cos iz}{z^n}$ في المنطقة الاتية

$|z-i|>2$

١١- صنف النقاط الشاذة لكل من الدوال الاتية

ا- $f(z)=\frac{\sin 2z}{z^3}$ ب- $f(z)=\frac{1}{\ln z}$ ج- $f(z)=\frac{1-cosn(z+i)}{z(z^2+1)^2}$ د- $f(z)=\frac{\sin z}{z^2+z}$

(المحاضره : الثلاثون)

نظرية الرواسب Residue theory

تعريف :

لتكن الدالة f لها نقطة شاذة غير زائلة z_o فإن متسلسلة لورانت تكون كالآتي :

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_o)^n$$

داخل الشكل الحلقي $0<|z-z_o|<R$.

فإن المعامل c_{-1} للحد $\frac{1}{z-z_o}$ يسمى الراسب (الباقي) للدالة f عند z_o وبالرموز يكون

$$Res[f,z]=c_{-1}$$

مثال. متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$ تكون بالصيغة الآتية:

$$f(z)=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{2!\,z^2}+\frac{2^3}{3!\,z^3}+\cdots$$

لذلك فإن معامل $\frac{1}{z-0}$ والذي يمثل العدد ٢ هو الراسب (الباقي) للدالة

أي أن $Res[f,0]=2$.

في بعض الأحيان نواجه صعوبة في إيجاد المفكوك لدالة ما من أجل حساب الراسب (الباقي) لذلك اقتضى لنا عرض هذه النظرية التي تساعدنا في إيجاد الراسب (الباقي) عند الأقطاب للدالة.

نظرية . إذا كانت الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة k عند z_o ، فإن

$$Res[f, z_o] = \lim_{z \to z_o} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_o)^k f(z)] \qquad (1)$$

نتيجة. إذا كان للدالة للعقدية f قطب بسيط عند z_o فإن

$$Res[f, z_o] = \lim_{z \to z_o} (z - z_o)^k f(z)$$

مثال . إحسب الراسب (الباقي) للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$

الحل . الدالة $f(z)$ لها قطب من الرتبة الثانية أي أن $k = 2$ عند الصفر لذلك فإن الراسب لهذه الدالة يكون

$$Res[f, 0] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(z \frac{\sin z}{z^3}\right) = \lim_{z \to 0}\left(\frac{z^2 \cos z - 2z \sin z}{z^4}\right)$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال نجد قيمة الغاية وتساوي صفر لذلك فإن

$$Res[f, 0] = 0$$

مثال . إحسب الراسب للدالة $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$

الحل . الدالة $f(z)$ لها قطب بسيط عند $z = \pi , z = 0$ لذلك فإن الراسب يمكن حسابه بالصورة الآتية:

$$Res[f, 0] = \lim_{z \to 0}\left(z \frac{e^z}{\sin z}\right) = e^0 \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$$

وكذلك

$$Res[f, \pi] = \lim_{z \to \pi}((z - \pi) \frac{e^z}{\sin z}) = e^\pi \lim_{z \to \pi} \frac{z - \pi}{\sin z} = -e^\pi$$

مثال . إحسب الراسب للدالة $f(z) = \frac{\cot z}{z^2}$

الحل . بما أن الدالة لها قطب من الرتبة ٣ عند النقطة $z = 0$ لذلك فإن الراسب لهذه الدالة هو

$$\begin{aligned} Res[f(z), 0] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \frac{\cot z}{z^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}[z \cot z] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}[\cot z - z \csc^2 z] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0}[-2 \csc^2 z + 2z \csc^2 z \cot z] \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z \cos z - \sin z}{\sin^3 z} = \lim_{z \to 0} \frac{-\sin z}{3 \sin^2 z \cos z} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} \lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z} = -\frac{1}{3}.$$

مثال : احسب الراسب للدالة

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^3 - z^2)}$$

الحل:

نلاحظ ان الدالة

$f(z)$ قطب لها عند z=1 وقطب من الرتبه عند

$z = 0$ و هكذا نحل

$$Res_1\, f(z) = lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = e$$

$$Res_0\, f(z) = lim_{z\to 0}[z^2 f(z)] = lim_{z\to 0}\frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2} = -2$$

مثال: احسب الرواسب للدالة

$$f(z) = \frac{e^z + 1}{\left(z - \frac{\pi}{2}i\right)(z^2+1)}$$

الحل:

نلاحظ ان الدالة

$f(z)$لها اقطاب عند z=1,+i, -i, $\pi/2i$ جميعها نقاط شاذه بسيطه

الراسب عند $\pi/2i$ هو

$$Res\left(f(z), \frac{\pi}{2i}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2i}}\left(\frac{e^z+1}{(z^2+1)}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2i}} + 1}{\left(\frac{\pi}{2i}^2 + 1\right)} = \frac{i+1}{-\frac{\pi^2}{4} + 1}$$

(المحاضره : الحادية و الثلاثون)

نتيجة. لتكن الدالة $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$، حيث $P(z), Q(z)$ تحليليتان عند z_o بحيث $Q(z)$ لها قطب بسيط عند z_o بينما $P(z_o)\neq 0$ فإن

$$Res[f,z_o]=\frac{P(z_o)}{Q'(z_o)}$$

البرهان . الدالة التحليلية $Q(z)$ لها قطب بسيط عند z_o أي أن $Q'(z_o)=0$ لذلك فإن الراسب لهذه الدالة هو

$$Res[f,z_o]=\lim_{z\to z_o}(z-z_o)\frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_o}\frac{P(z)}{\left[\frac{Q(z)-Q(z_o)}{z-z_o}\right]}=\frac{P(z_o)}{Q'(z_o)}$$

مثال. جد الراسب للدالة $f(z)=cotz$

الحل . يمكن إعادة كتابة الدالة $f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}$

لذلك بما أن البسط والمقام دوال تحليلية وأن $sin\, z$ لها قطب بسيط عند $z=n\pi$ حيث n عدد صحيح وكذلك

$$\cos n\pi\neq 0$$

لذلك فإن الراسب لكل عدد صحيح n هو

$$Res[f,n\pi]=\frac{cos\, n\pi}{sin'\, n\pi}=1$$

نتيجة . إذا كانت الدالة $f(z)$ لها قطب بسيط عند z_o وكانت $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o فإن

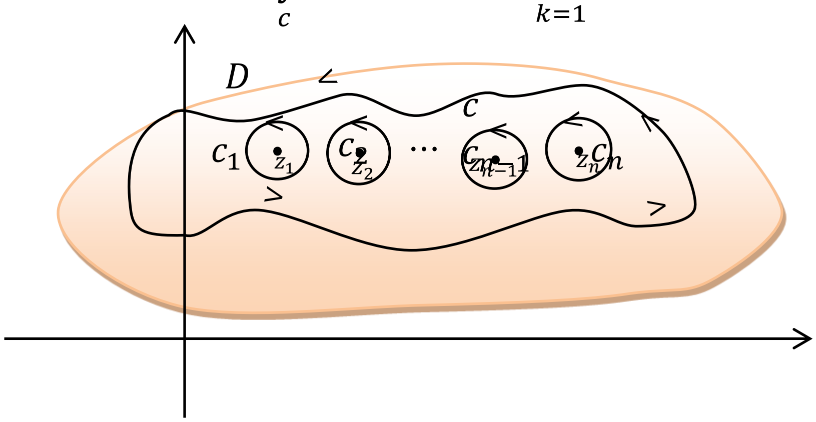
$$Res[fg,z_o]=g(z_o)Res[f,z_o]$$

نظرية كوشي للرواسب Cauchy Residue Theorem

لتكن D منطقة بسيطة الإتصال وليكن cكنتورمغلق بسيط وبالإتجاه الموجب (عكس اتجاه عقرب الساعة) يقع داخل D فإذا كانت الدالة f تحليلية داخل وعلى حدود الكانتور c، باستثناء عدد منته من النقاط $z_n,\dots,z_2,z_1$ تقع داخل c فإن

$$\int_c f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[f,z_k] \qquad (3)$$

وكما موضح بالشكل



البرهان . لتكن المسارات c_k، حيث $k = 1, \dots, n$ دوائر بالإتجاه الموجب مركزها z_k ونصف قطرها r_k على الترتيب وكما في الشكل (٦-١)، لذلك فإن الصيغة الآتية متحققة

$$(4) \qquad \int_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_k} f(z)dz$$

الدالة $f(z)$ لها متسلسلة لورانت عند z_k حيث

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_k)^j$$

لذلك فإن

$$\int_{c_k} f(z)dz = \int_{c_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_k)^j \, dz$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \int_{c_k} (z - z_k)^j \, dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res[f, z_k]$$

بالتعويض في (٤) نستنتج العلاقة (٣)

مثال . جد قيمة التكامل

$$\int_c \frac{z-1}{z(z^2+1)} dz$$

حيث c هو المسار $|z - i| = \frac{1}{2}$ في الإتجاه الموجب

الحل .

$$\frac{z-1}{z(z^2+1)} = \frac{z-1}{z(z-i)(z+i)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على نقطة شاذة واحدة وهي $z = i$ وعليه نجد الراسب للدالة عند $z = i$ وكما يلي

$$Res[f, i] = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{z-1}{z(z-i)(z+i)}$$

$$= (-\frac{i-1}{2})$$

لذلك فإن

$$\int_c \frac{z-1}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i Res[f,i]$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{i-1}{2}\right) = \pi(i+1)$$

مثال . جد قيمة التكامل $\int_c \frac{z}{z^2-1} dz$ حيث c هو المسار $|z| = \frac{3}{2}$ في الإتجاه الموجب

الحل .

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على نقطتين شاذتين وهي $z = 1, z = -1$ لذلك فإن الراسب للدالة عند النقطة $-1, 1$ هو

$$Res[f,1] = \frac{1}{2} \;\; , \;\; Res[f,-1] = \frac{1}{2}$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{z}{z^2-1} dz = 2\pi i (Res[f,1] + Res[f,-1])$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi i$$

مثال . جد قيمة التكامل $\int_c \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2} dz$ حيث c هو المسار $|z| = 2$ في الإتجاه الموجب

الحل:نفرض ان

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على نقطتين شاذتين وهي $z = 1, z = 0$ لذلك فإن الراسب للدالة عند النقطة 1,0 , هو

$$Res[f,1] = 1 \; , \quad Res[f,0] = 1$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i (1+1) = 4\pi i$$

مثال . جد قيمة التكامل $\int_c \frac{1}{z^4+z^2}dz$ حيث c هو المسار $\left|z-\frac{i}{2}\right|=1$ في الإتجاه الموجب

الحل: نفرض ان

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z^2+1)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على نقطتين شاذتين وهي $z=i,z=0$ لذلك فإن الراسب للدالة عند النقاط $i,0$, هو

$$Res[f,i]=-1/2i\ ,\quad Res[f,0]=0$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{1}{z^4+z^2}dz=2\pi i(0-1/2i)=-\pi$$

مثال . جد قيمة التكامل $\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}dz$ حيث c هو المسار $|z|=2$ في الإتجاه الموجب

الحل: نفرض ان

$$f(z)=\frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على خمس نقاط شاذه وهي $z=0,z=1,-1,i,-i$

وجميعها تقع داخل المنحني وعليه

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t^5}+\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}(\frac{1}{t^4}-1)}=\frac{\frac{1+t^4+t^5}{t^5}}{\frac{1-t^4}{t^6}}=(t+t^5+t^6).\frac{1}{1-t^4}$$

$$=(t+t^5+t^6)[1+t^4+t^8+t^{12}+\cdots]$$

ومنه يكون

$$Res(f(z),\infty)=-1$$

وعليه

$$\int_{c} \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)}\,dz = 2\pi i$$

(المحاضره : الثانية و الثلاثون)

التكاملات المثلثية Trigonometric Integrals

في هذا النوع من التكاملات المثلثية سنرى كيف يتم الإستفادة من نظرية كوشي للرواسب تطبيقها على عدد معـــــــين من التكاملات المحددة وبعضها تظهر في الفيزياء والتطبيقات الهندسية حيث من الصعب إيجاد التكاملات مباشرة لذلك نستخدم نظرية كوشي للرواسب.

ولحساب التكاملات من الصيغة

$$\int_{0}^{2\pi} F(\cos\theta\,,\sin\theta)\,d\theta$$

نقوم بتحويل الدالة $F(\cos\theta\,,\sin\theta)$ إلى دالة معقدة بمتغير واحد $f(z)$ فنضع $z=e^{i\theta}$ حيث $0\le\theta\le 2\pi$ وهذه هندسياً تمثل معادلة دائرة نصف قطرها ١ ومركزها نقطة الأصل وتكافئ $c: |z|=1$ وكذلك نعلم أن

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

وعليه يكون
$$z^{-1}=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

وبالتالي نستنتج أن

$$cos\,\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad , \qquad sin\,\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

أما dz فيمكن حسابها حيث

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

ثم نعوض هذه العلاقات في التكامل المطلوب حسابه فنحصل على تكامل لدوال معقدة على دائرة الوحدة $c: |z| = 1$ ومن ثم وحسب الطرق السابقة والمعروفة لدينا يتم حساب هذا التكامل.

مثال . إحسب

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\,\theta}$$

الحل . حسب العلاقات أعلاه يكون لدينا

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\,\theta} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2 - \frac{iz}{2}(z + z^{-1})} = \frac{-2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}$$

والدالة ولتكن

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 1}$$

لها أقطاب بسيطة عند

$$z = 2 \mp \sqrt{3}$$

ولكن نقط القيمة $z = 2 - \sqrt{3}$ تقع داخل دائرة الوحدة والراسب لها هو

$$Res[f(z), 2 - \sqrt{3}] = \lim_{z \to 2-\sqrt{3}} (z - i) \frac{z - (2 - \sqrt{3})}{\left(z - (2 - \sqrt{3})\right)\left(z + (2 - \sqrt{3})\right)} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

لذلك يكون التكامل حسب نظرية كوشي للرواسب كالآتي

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\,\theta} = \frac{-2}{i} 2\pi i \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

مثال . إحسب التكامل الآتي

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

حيث $a \neq \mp 1$

الحل .

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

وبتعويض العلاقات السابقة في التكامل فإننا نحصل على

$$I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left[1 + a^2 - a\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]} = \frac{i}{2a}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

وحسب قيمة a تكون لدينا حالتين

الحالة الأولى : $|a| < 1$ وفي هذه الحالة فإن هناك قطب بسيط داخل دائرة الوحدة عند النقطة $z = \frac{1}{a}$ وباستخدام نظرية الرواسب نجد أن

$$I = \frac{i}{2a} 2\pi i \, Res[f(z), a] = \frac{\pi}{1 - a^2}$$

والنتيجة النهائية يمكن كتابتها كالآتي

$$I = \frac{\pi}{|1 - a^2|} \ , \ \ a \neq \mp 1$$

مثال: إحسب التكامل الآتي

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$$

الحل .نضع

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \qquad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad |z| = 1$$

وبتعويض العلاقات السابقة في التكامل فإننا نحصل على

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+1}{2z}\cdot\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z^2+1}{2z}}=\int_{|z|=1}\frac{z^2-1}{z(z^2+4z-1)}dz$$

ثم نحسب الرواسب

$$Res\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+4z-1)},0\right)=-1$$

$$Res\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+4z-1)},-2+\sqrt{3}\right)=1$$

وعليه يكون

$$I=2\pi i(-1+1)=0$$

(المحاضره: الثالثة و الثلاثون)

التكاملات المعتلة Improper Integrals

هنا سنقوم بمعرفة كيفية حساب تكاملات على فترات غير منتهية حيث إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة مستمرة على المحور الحقيقي غير السالب $0\le x\le\infty$ فإن التكامل المعتل للدالة $f(z)$ على الفترة $[0,\infty)$ يعرف كالآتي:

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}f(x)dx$$

وبشرط وجود الغاية سيكون التكامل أعلاه متقارب وعكسه يكون متباعد وبنفس الطريقة فإن

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{0} f(x)dx$$

وإذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة لكل قيم x فإن التكامل المعتل للدالة $f(x)$ على الفترة $(-\infty,\infty)$ يعرف كالآتي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx$$

بشرط الغاية لكلا الطرفين موجودة

أما قيمة كوشي الأساسية التي يرمز لها بالرمز $P.V.$ للتكامل فتعرف كالآتي:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

بشرط وجودة الغاية .

مثال. إحسب التكامل

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-dx}{x^2+1}$$

الحل .

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{-dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} [cot^{-1} R - cot^{-1}(-R)]$$

$$= 0 - \pi = -\pi$$

ملاحظة. قيمة كوشي الأساسية من الممكن إيجادها حتى في التكامل الغير متقارب ومثال على ذلك

$$\int_{-R}^{R} xdx = 0 \quad \text{لكل } R$$

وهنا فإن

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$$

لكن

$$\int_{0}^{\infty} xdx = \infty$$

وعلى اية حال إذا كان التكامل المعتل موجود فإنه يساوي قيمة كوشي الأساسية $(P.V.)$ وكذلك إذا كانت الدالة $f(x)$ زوجية أي أن $f(-x) = f(x)$ لكل قيم x الحقيقية وقيمة كوشي الأساسية موجودة فإن التكامل موجود وبالتالي يكون

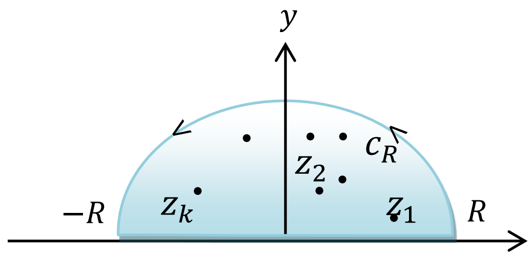
$$\frac{1}{2}P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

النظرية القادمة ستستخدم نظرية كوشي للرواسب لإيجاد قيمة كوشي الأساسية لتكامل الدالة f على الفترة $(-\infty,\infty)$.

نظرية . لتكن $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $Q\,,P$ كثيرات حدود من الدرجة $n\,,m$ على الترتيب. إذا كانت $Q(x)\neq 0$ لكل قيم x الحقيقية وأن $n\geq m+2$ فإن

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q},z_j\right]$$

حيث $z_j \quad (j=1,\dots,k)$ أقطاب للدالة $\frac{P}{Q}$ تقع في نصف المستوي العلوي كما في الشكل



البرهان . بما أن $\frac{P}{Q}$ عدد منته من الأقطاب تقع داخل نصف المستوي العلوي والعدد الحقيقي R يمكن إيجاده حيث أن الأقطاب جميعها تقع في داخل الكنتور c الذي يتألف من $-R\leq x\leq R$ بالإضافة إلى c_R شبه دائرة نصف قطرها R وكما موضحة في الشكل وبالتالي فإن

$$\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int_{c}\frac{P(z)}{Q(z)}dz - \int_{c_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

وباستخدام نظرية كوشي للرواسب فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q},z_j\right] - \int_{c_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

والآن إذا استطعنا إثبات أن التكامل

$$\int_{c_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz \quad \text{يؤول إلى الصفر}$$

عندما $R\to\infty$ فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة.

الآن بما أن $n\geq m+2$ فإن درجة كثيرة الحدود $Q(z)$ أكبر من درجة $zP(z)$ وبفرض ان

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

و

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$$

فإن

$$P(z) = z^m P_1(z)$$

حيث

$$P_1(z) = a_m + a_{m-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-m+1} + a_0 z^{-m}$$

و

$$Q(z) = z^n Q_1(z)$$

حيث

$$Q_1(z) = b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}$$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{zP(z)}{Q(z)} = \frac{z^{m+1} P_1(z)}{z^n Q_1(z)}$$

وبما أن $P_1(z) \to a_m$ و $Q_1(z) \to b_n$ عندما $|z| \to \infty$, $m \geq n+2$ فإن

$$\left|\frac{zP(z)}{Q(z)}\right| \to 0$$

لذلك لكل $\varepsilon > 0$ من الممكن أن نختار R أكبر بكفاية لـ $\left|\frac{zP(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}$ متى ما z تقع على c_R وبالتالي نحصل على

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{\pi|z|} = \frac{\varepsilon}{\pi R}$$

حيث z تقع على c_R وباستخدام المتراجحة ML نحصل على

$$\left|\int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz\right| \leq \int_{c_R} \frac{\varepsilon}{\pi R} |dz| = \frac{\varepsilon}{\pi R} \pi R = \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ إختياري فإن

$$lim_{R\to\infty} \int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

وأخيرا نستنتج أن

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q}, z_j\right]$$

مثال . جد

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, sinx}{(x^2+2)^3} dz$$

الحل . نلاحظ ان شروط النظرية (٦-٢) متحققة لذلك فإن قيمة كوشي الأساسية للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{xi}}{(x^2+2)^3} dz$ موجودة وهي

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{xi}}{(x^2+2)^3} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res[g, z_j]$$

حيث $z_1, \ldots, z_k$ أقطاب للدالة

$$g(z) = \frac{z\, e^{zi}}{(z^2+2)^3}$$

الواقعة في النصف العلوي من المستوي،

وبعد حساب الراسب للدالة $g(z)$ والذي يكون كالآتي:

$$Res[g, 2i] = \frac{0.046}{e^2}$$

ومن هذا ينتج

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, sinx}{(x^2+1)^2} dx = Im\left[2\pi i \frac{0.046}{e^2}\right]$$
$$= \frac{0.092\pi}{e^2}$$

مثال . جد

$$p > 0 \quad \text{بحيث} \quad P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+p^4}$$

الحل. شروط النظرية(٦-٢)متحققة والنقاط الشاذة عند $z_2 = pe^{\frac{3\pi i}{4}}, z_1 = pe^{\frac{\pi i}{4}}$ في نصف المستوي العلوي هي أقطاب بسيطة لذلك فإن

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+p^4} = 2\pi i\left(Res\left[\frac{1}{x^4+p^4}, z_1\right] + Res\left[\frac{1}{x^4+p^4}, z_2\right]\right)$$
$$= \frac{2\pi i}{2p^3}\left(-e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{-\pi i}{4}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}p^3}$$

(المحاضره : الرابعة و الثلاثون)

التكامل على الكنتور المسنن Indented Contour Integral

هنا سندرس نوع آخر من التكامل المعتل بفرض أن الدالة المتكاملة غير معرفة عند نقطة تقع في فترة التكامل فإذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $b < x \leq c$ فإن التكامل المعتل للدالة f على الفترة $(b, c]$ يعرف كالآتي:

$$\int_{b}^{c} f(x)dx = \lim_{r\to b^+} \int_{r}^{c} f(x)dx$$

بشرط وجود الغاية

وبنفس الحالة إذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $a \leq x < b$ فإن التكامل المعتل للدالة f على الفترة $[a, b)$ يكون:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{R\to b^-} \int_{a}^{R} f(x)dx$$

بشرط وجود الغاية.

أما الآن إذا كانت الدالة مستمرة على كل نقاط x التي تقع في الفترة $[a, c]$ ما عدا $x = b$ حيث $a < b < c$ فإن قيمة كوشي الأساسية للدالة f $(Principle\ Value\ )$ على الفترة $[a, c]$ تعرف كالآتي:

$$P.V.\int_{a}^{c} f(x)dx = \lim_{r\to 0}\left[\int_{a}^{b-r} f(x)dx + \int_{b+r}^{c} f(x)dx\right]$$

بشرط وجود الغاية.

مثال .

$$P.V.\int_{1}^{9} \frac{1}{x-3}dx = \lim_{r\to 0^+}\left[\int_{1}^{3-r} \frac{1}{x-3}dx + \int_{3+r}^{9} \frac{1}{x-3}dx\right]$$

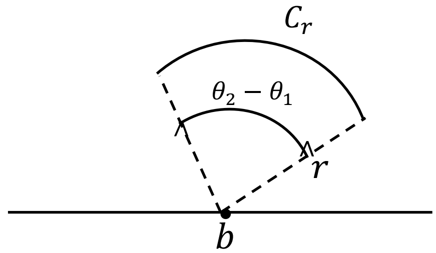
$$= \lim_{r\to 0^+}[\ln r - \ln 2 + \ln 6 - \ln r] = \ln 3$$

مأخوذة . لتكن $f(z)$ لها قطب بسيط عند النقطة b على محور x. إذا كان C_r كنتور معرف بالمعادلة الوسيطية

$$C_r: b + re^{i\theta}$$

حيث $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ كما في الشكل (٦-٣) فإن

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)dz = i(\theta_2-\theta_1)Res[f(z),b]$$



الشكل ٣-٦

البرهان . متسلسلة لورانت للدالة
f عند النقطة bهي

$$f(z)=\frac{Res[f,b]}{z-b}+g(z) \qquad (5)$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية عند b
نجري التكامل على العلاقة (٥) للطرفين وباستخدام المعادلة الوسيطية C_r فيكون

$$\int_{C_r} f(z)dz = Res[f,b]\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta + ir\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(b+re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta$$

$$= i(\theta_2-\theta_1)Res[f,b] + ir\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(b+re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta$$

بما أن $g(z)$ تحليلية عند النقطة b فإنه يوجد $M>0$ بحيث أن $\left|g\left(b+re^{i\theta}\right)\right|\le M$ في جوار ما للنقطة b
ومنه نستنتج

$$\lim_{r\to 0^+} ir\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(b+re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta \le \lim_{r\to 0^+} r\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r(\theta_2-\theta_1)M = 0.$$

نظرية. لتكن $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ دالة نسبية بحيث أنه لا يوجد صفر مشترك بينهما و$Q(z)$ لها أصفار بسيطة عند النقاط $b_1,\dots,b_\ell$ على خط الأعداد الحقيقية و $m\ge n+2$ حيث m درجة كثيرة الحدود $Q(z)$, n درجة كثيرة الحدود $P(z)$
فإن

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{k}Res[f,z_j]+\pi i\sum_{k=1}^{l}Res\,[f,b_k]$$

حيث z_j أقطاب للدالة $f(z)$ تقع داخل نصف المستوي العلوي.

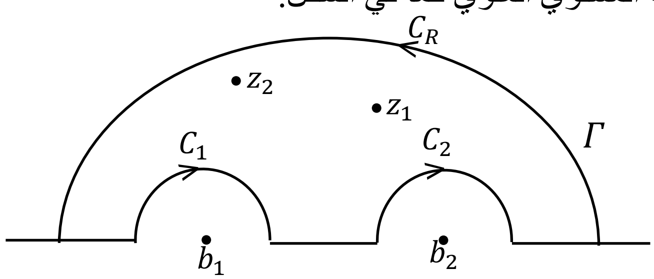
نظرية. لتكن الدالة النسبية $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ حيث لايوجدصفرمشترك بين $Q(z)$ و $P(z)$ وأن $Q(z)$ لها أصفاربسيطة عند النقاط $b_1,\dots,b_\ell$ على خط الأعداد الحقيقية وأن $m\geq n+2$ حيث m درجة كثيرة الحدود $Q(z)$, n درجة كثيرة الحدود $P(z)$ فإن لكل $a>0$،

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos x\,dx=-2\pi\sum_{j=1}^{k}Im(\,Res\left[e^{iaz}f,z_j\right])-\pi\sum_{k=1}^{l}Im(\,Res\left[e^{iaz}f,b_k\right])$$

و
$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin x\,dx=2\pi\sum_{j=1}^{k}Re\,(Res\left[e^{iaz}f,z_j\right])+\pi\sum_{k=1}^{l}Re\,(Res\left[e^{iaz}f,b_k\right])$$

حيث z_j أقطاب للدالة $f(z)$ تقع داخل نصف المستوي العلوي كما في الشكل.

(



لتكن R كبيره بما فيها الكفاية لكي تقع الأقطاب للدالة f داخل شبه الدائرة $C_R: z=R\,e^{i\theta}$ حيث $0\leq\theta\leq\pi$ ولتكن r أصغر ما يمكن لشبه الدائرة $C_k: b_k+re^{i\theta}$ حيث $0\leq\theta\leq\pi$ وأن $k=1,\dots,\ell$ لكي تكون الدائرة منفصلة والأقطاب تقع داخلهم Γ كنتور مغلق وبالإتجاه الموجب مكون من C_R , $-C_k$ حيث $k=1,\dots,\ell$ والخط الواصل بين شبه الدوائر وليكن

الصغيرة هو

$$I_R=[-R,R]\setminus\bigcup_{k=1}^{\ell}(b_{k-r},b_{k+r})$$

لذلك من نظرية كوشي للرواسب نحصل على

$$2\pi i\sum Res[f,z_j]=\int_{\Gamma}f(z)dz=\int_{C_R}f(z)dz+\int_{I_R}f(z)dz-\sum_{k=1}^{\ell}\int_{C_R}f(z)dz$$

الآن لندع $R\to\infty$ و $r\to 0^+$. إذا كانت $f(z)$ تحقق شروط النظرية ٦-٢والمأخوذة ٦-١ فإن

$$2\pi i\sum Res[f,z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i\sum_{k=1}^{\ell} Res[f,b_k]$$

لكن الدالة $f(z)$ مضروبة بواسطة e^{iaz} حيث $a>0$ ، أي أن

$$2\pi i\sum Res[e^{iaz}f,z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx - \pi i\sum_{k=1}^{\ell} Res[e^{iaz}f,b_k]$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والخيالية للعلاقة الأخيرة نحصل على المطلوب.

مثال . جد قيمة كوشي الأساسية للتكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4-1}dx$$

الحل . الدالة $f(z)=\frac{}{z^4-1}$ لها أقطاب بسيطة عند $z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=i,\ z_4=-i$, وبما أن z_4 يقع في نصف المستوي السفلي فإنه من النظرية (٦-٣) ينتج

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^3-8}dx = 2\pi i Res[f,z_3] + \pi i(Res[f,z_1]+Res[f,\ z_2])$$

$$= 2\pi i\frac{-1}{4i} + \pi i(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{-2}$$

مثال . لتكن الدالة $f(x)=\frac{x}{x^2-b^2}$ ، $b>0$ فإن الدالة $f(z)=\frac{z}{z^2-b^2}$ لها أقطاب بسيطة عند $b\ ,\ -b$ ، لكل $a>0$

$$Res\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2},b\right] = \frac{e^{iaz}}{2}$$

$$Res\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2-b^2},-b\right] = \frac{e^{-iaz}}{2}$$

لذلك من النظرية (٦-٤) ينتج لنا

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos ax}{x^2-b^2}dx = -\pi Im\left(\frac{e^{iab}}{z}+\frac{e^{-iab}}{z}\right) = -\pi Im(\cos ab) = 0$$

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2-b^2}dx = \pi Re\left(\frac{e^{iab}}{z}+\frac{e^{-iab}}{z}\right) = \pi(\cos ab).$$

(المحاضره: الخامسة و الثلاثون)

تكامل الدوال متعددة القيمة حول نقاط الفرع Integral along a branch points

تعريف . يقال للدالة $f(x)$ بأنها دالة ميروفية إذا كانت تحليلية على المستوي العقدي $\mathbb{C}$ باستثناء الأقطاب للدالة.
وقد لاحظنا في دراستنا السابقة إلى التعرض لهذا النوع من الدوال وبكثرة ومنها الدالة الكسرية هي دالة ميروفية مع عدد منتهٍ من الأقطاب وكذلك $\tan z$, $\cot z$ هي دوال ميروفية مع عدد غير منتهٍ من الأقطاب البسيطة. بينما الدالة $e^{\frac{1}{z}}$ دالة غـير ميروفية لأن ٠ ليس قطباً.

والان لتكن α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$ فإن الفرع للقيمة z^{α} يعرف كالآتي:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(ln|z|+i\, arg z)}$$
$$= r^{\alpha}(cos\alpha\theta + isin\alpha\theta)$$

حيث $0 \le \theta < 2\pi \ , \ r = |z|$

ومن هذا نلاحظ أن z^{α} تحليلية في المنطقة $0 \le \theta < 2\pi \ , \ r > 0$

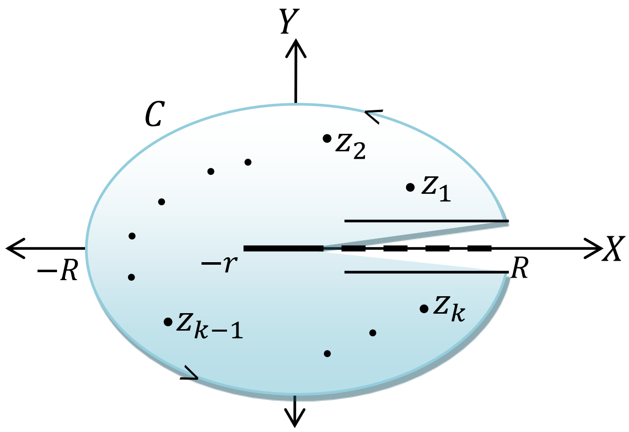
وباستخدام هذه المعلومات نجد قيمة كوشي الأساسية للتكامل المعتل $\int_0^{\infty} x^{\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ من النظرية الآتية:

نظرية . لتكن P , Q كثيرات حدود من الدرجة m , n على الترتيب حيث $n \ge m+2$، إذا كانت $Q(x) \ne 0$ لكل $x > 0$, Q لها جذر من الرتبة على الأكثر ١ عند نقطة الأصل و $f(z) = z^{\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)}$ حيث $0 < \alpha < 1$ فإن

$$P.V. \int_0^{\infty} x^{\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i\alpha 2\pi}} \sum_{j=1}^{k} Res[f, z_j]$$

حيث $z_1, \dots, z_k$ أقطاب غير صفرية للدالة الكسرية $\frac{P(z)}{Q(z)}$

البرهان . ليكن C كنتور مغلق بسيط وبالإتجاه الموجب المكون من الدائرة التي نصف قطرها R والدائرة التي مركزها r والقطعة الواصلة بينهما وباتجاهين مختلفين لتجنب نقطة الفرع وعزلها وطريقة إختيار r , R نختارها لضمان وقـــــــــوع الأقطاب للدالة الكسرية P/Q وهي $z_1, \dots, z_k$ داخل الكنتور C وكما موضح بالشكل



باستخدام نظرية كوشي للرواسب يكون لدينا

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res[f, z_j]$$

وبتجزئة التكامل $\int_C f(z)dz$ فإن المسار C يكون كالآتي

$$C = C_R - C_r + [r, R] + [R, r]$$

إذن التكامل في الطرف الأيسر يكون

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz - \int_{C_r} f(z)dz + \int_r^R f(z)dz - \int_r^R f(z)dz \qquad (6)$$

وهنا يجب أن نكون حذرين حيث التكامل في الحدين الأخيرين مختلفين تماما وذلك لإختلاف سعة z حيث عند اقترابنا من النصف العلوي للمستوي فإن

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|$$

بينما من النصف السفلي للمستوي يكون

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|e^{2\pi i}$$

لذلك فإن العلاقة (٦) تكون كالآتي

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz - \int_{C_r} f(z)dz + \int_r^R \frac{z^\alpha P(z)}{Q(z)}dz - \int_r^R \frac{z^\alpha e^{2\pi i\alpha} P(z)}{Q(z)}dz$$

$$= \int_{C_R} f(z)dz - \int_{C_r} f(z)dz + \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right)\int_r^R \frac{z^\alpha P(z)}{Q(z)}dz$$

الان لندع $R \to \infty, r \to 0^+$ فإن

$$\int_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz - \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)dz + \left(1-e^{2\pi i\alpha}\right)\lim_{r\to 0}\int_r^R \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)}dx$$

لذلك فإن القيمة الأساسية لكوشي تكون

$$P.V.\int_0^\infty x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_r^R \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)}dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left[\int_C f(z)dz + \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)dz - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz\right]$$

ولإيجاده التكامل المعتل يجب أن يكون الحدين الأخيرين أصفار لذلك يكون لدينا

$$P.V.\int_0^\infty x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\sum_{j=1}^{k} Res[f, z_j]$$

مثال . جد القيمة الأساسية لكوشي للتكامل $\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x(x+3)}dx$ حيث $0<\alpha<1$

الحل . الدالة لها قطب بسيط عند النقطة الشاذة $z=-3$ لذلك باستخدام النظرية السابقة

$$P.V.\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x(x+3)} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}Res[f,-3]$$

وعليه يكون

$$P.V.\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x(x+3)} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left(\frac{e^{\pi i\alpha}}{-3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\frac{e^{\pi i\alpha}-e^{-\pi i\alpha}}{2i}} = \frac{\pi}{3\sin \alpha\pi}$$

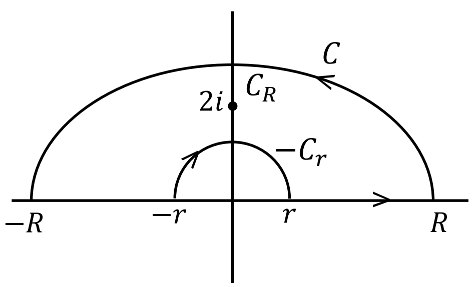
مثال . إثبت أن

$$P.V.\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^2+4}=\frac{\pi\ln 2}{4}$$

الحل . هنا سنستخدم الدالة

$$f(z)=log\frac{z}{z^2+4}$$

لذلك فإن مسار التكامل C سيتكون من القطعة $[r,R],[-R,-r]$ لمحور السينات والدائرة $C_r: z=re^{i\theta}$,
$C_R: z=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ كما في الشكل (٦-٦)



شكل ٦-٦

باستخدام نظرية كوشي للرواسب فإن

$$\int\frac{log\,z}{z^2+4}dz=2\pi i\,Res[f,2i]=\frac{\pi\ln 2}{2}+i\frac{\pi^2}{4}$$

وباستخدام قاعدة لوبيتال نستطيع أن نثبت أن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=0$$

لنحصل على

$$P.V.\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{ln|x|+i\pi}{x^2+4}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{ln\,x\,dx}{x^2+4}\right)=\frac{\pi\,ln\,2}{2}+i\frac{\pi^2}{4}$$

بتساوي الأجزاء الحقيقية مع بعضها نستنتج أن

$$P.V.\int_{0}^{\infty}\frac{2ln\,x}{x^2+4}=\frac{\pi\,ln\,2}{2}$$

Homework

١- جد راسب(باقي) الدوال الاتية

ا- $f(z)=\frac{csc^2 z}{z}$ ب- $f(z)=\frac{\cos z}{z^5}$

ج - $f(z)=\frac{z^2}{(1-z)^2(2-z)}$

٢- جد قيمة كل من التكاملات الاتية

أ- $\int_C \cos\frac{1}{z^2}\, e^{\frac{1}{z}}$ حيث $C:|z|=1$

ب- $\int_C \frac{\cos\pi z}{z(z-1)^2}$ حيث $C:|z|=2$

ج $\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta)^2}{13-12\cos\theta}d\theta$

٣- جد قيم كوشي الاساسية لكل من التكاملات الاتية

أ- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xsin\,x}{x^2+9}dx$ ب- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^3+x}$

ج- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,x}{\pi^2-4x^2}dx$ د- $\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2+4}dx$

٤- اثبت ان

$\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)-cos\,(bx)}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(b-a)$ حيث $a\geq 0\ ,b\geq 0$

(المحاضره: السادسة و الثلاثون)

التطبيقات المطابـــــقة Conformal Mapping

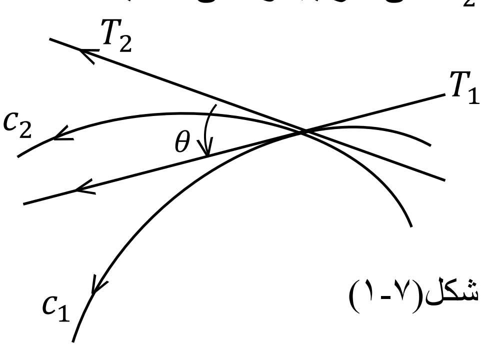
تعريف . التطبيق $\omega = f(z)$ يسمى مطابقاً عند نقطة إذا كان محافظاً على الزاوية بين المنحنيات المتقاطعة من خلال سعة الزاوية واتجاهها.

وهناك تعريف آخر للتطبيق المطابق وهو أن التطبيق f المعرف على مجموعة مفتوحة يسمى مطابقاً إذا كانت f تحليليـــــة ومتباينة (واحد إلى واحد).

ولنبدأ بالنظرية الآتية حيث تعطي الشرط الضروري ليكون التطبيق مطابقاً.

نظرية . إذا كان التطبيق f تحليليا في المجال D والنقطة $z_o \in D$ وكذلك $f'(z_o) \neq 0$ فإن f مطابقاًعند النقطة z_o.

البرهان . ليكن c_1 , c_2 منحنيان املسان يتقاطعان في النقطة z_o ومعرفان بالمعادلتين $z_1(t)$ حيث $a \le t \le b$, $z_2(s)$ حيث $a \le s \le b$ فإن الزاوية بين c_1 , c_2 هي الزاوية بين المماسين T_1 , T_2 على الترتيب وتسمى θ حيث $\theta = T_2 - T_1$ وكما في الشكل



شكل(٧-١)

وأن $T_1 = arg\, z_1'(t), T_2 = arg\, z_2'(s)$

أما النقطة z_o فتكون $z_o = z_1(t_o) = z_2(s_o)$

والان لنفرض أن f تنقل c_1 إلى γ_1 وكذلك تنقل c_2 إلى γ_2

لذلك $\omega_2 = f(z_2(s))\,,\quad {}_1 = f(z_1(t))$

وبذلك تكون φ الزاوية بين المماسين للمسارين γ_1 , γ_2 حيث

$$\varphi = arg\,\omega_2' - arg\,\omega_1'$$

وبصورة عامة إذا أخذنا γ تمثل بالمعادلة $\omega = f(z(t))$

فإن $\omega' = f'(z)(z'(t))$

لهذا نستنتج أن

$$\omega_1'(t_o) = f'(z_o)(z_1'(t_o))$$

$$\omega_2'(s_o) = f'(z_o)(z_2'(s_o))$$

وباستخدام خاصية السعة الزاوية بين حاصل ضرب عددين معقدين فإن

$$arg\ \omega_1' = arg\ f' + arg\ z_1'$$
$$arg\ \omega_2' = arg\ f' + arg\ z_2'$$

وبما أن $f'(z_o) \neq 0$ حسب فرض النظرية فإن $arg\ f'(z_o) \neq 0$ وعليه نستنتج أن

$$arg\ \omega_2' - arg\ \omega_1' = arg\ z_2' - arg\ z_1'$$

وبهذا يكون لدينا $\theta = \varphi$. وبهذا ينتهي البرهان .

مثال١ . إثبت أن التطبيق $\omega = f(z) = sin\, z$ تطبيقاً مطابقاً عند النقاط $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = \pi + i$ ثم حدد زاوية التدوير $\theta = arg\ f'(z)$ عند هذه النقاط.

الحل . بما أن $f'(z) \neq 0$ لذلك باستخدام النظرية (٧-٢) يكون f مطابقاً عند جميع النقاط باستثناء $z = (1 + \frac{1}{n})\pi$ حيث

$$f'(i) = \cosh 1\ ,\ f'(1) = \cos 1\, ,\ f'(\pi + i) = -cosh\, 1$$

لذلك فإن

$$\theta_1 = arg\ f'(i) = \pi$$
$$\theta_2 = arg\ f'(1) = \frac{\pi}{2}$$
$$\theta_3 = arg\ f'(\pi + i) = -\pi$$

ملاحظة : إذا كانت $f'(z) = 0$ حيث f دالة تحليلية غيرثابتة فإن النقطة z_o تسمى نقطة حرجة للتطبيق f وهنا يكون التطبيق $\omega = f(z)$ غير مطابقاً عند z_o.

نظرية . لتكن f دالة تحليلية عند z_o فإذا كان $f'(z_o) = 0, \dots, f^{k-1}(z_o) = 0$ و $f^k(z) \neq 0$ فإن التطبيق f يوسع الزاوية عند الرأس z_o بمقدار k من المرات.

البرهان . بما أن f تحليلية عند z_o لذلك يمكن كتابتها كالآتي

$$f(z) = f(z_o) + a_k(z - z_o)^k + a_{k+1}(z - z_o)^{k+1} + \cdots$$

وهذا يؤدي إلى

$$\omega - \omega_o = f(z) - f(z_o) = (z - z_o)^k g(z)$$

حيث $g(z)$ تحليلية عند z_o وأن $g(z_o) \neq 0$.

إذن

$$arg(\omega - \omega_o) = k\ arg(z - z_o) + \arg(g(z))$$

وليكن c منحني املس يمر من خلال النقطة z_o . إذا كانت $z \to z_o$ على c فإن $\omega \to \omega_o$ على صورة المنحني c وليكن k وعليه فإن زاوية ميل المماسين للمنحنيين k, c تعطى بالصيغة الآتية

$$\beta = \lim_{z \to z_o} arg(z - z_o) \ , \gamma = \lim_{\omega \to \omega_o} arg(\omega - \omega_o)$$

وعليه نستنتج أن

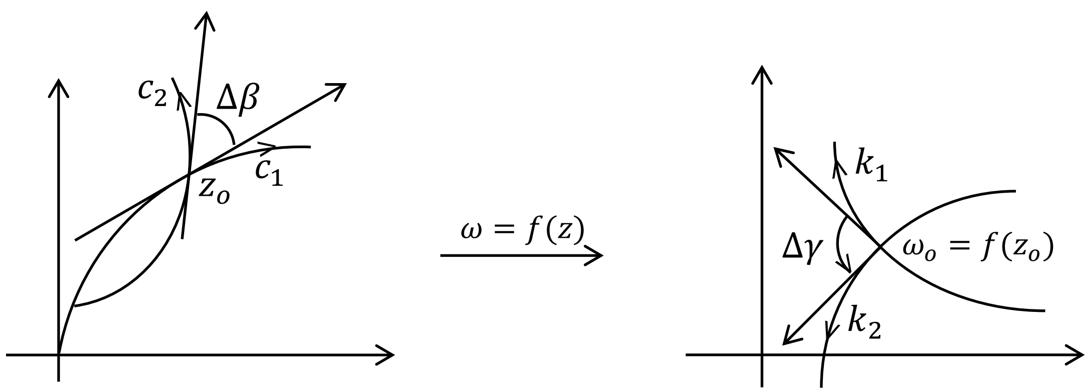
$$\gamma = \lim_{z \to z_o}\big(k\ arg(z - z_o)\big) + \big(arg\ g(z)\big)$$
$$= k\beta + \delta$$

حيث $\delta = arg\ g(z) = a_k$

الآن لنأخذ المسارين الأملسين c_2 , c_1 اللذين يتقاطعان في النقطة z_o و k_2 , k_1 صور المسارين c_2 , c_1 على الترتيب لذلك يكون لدينا

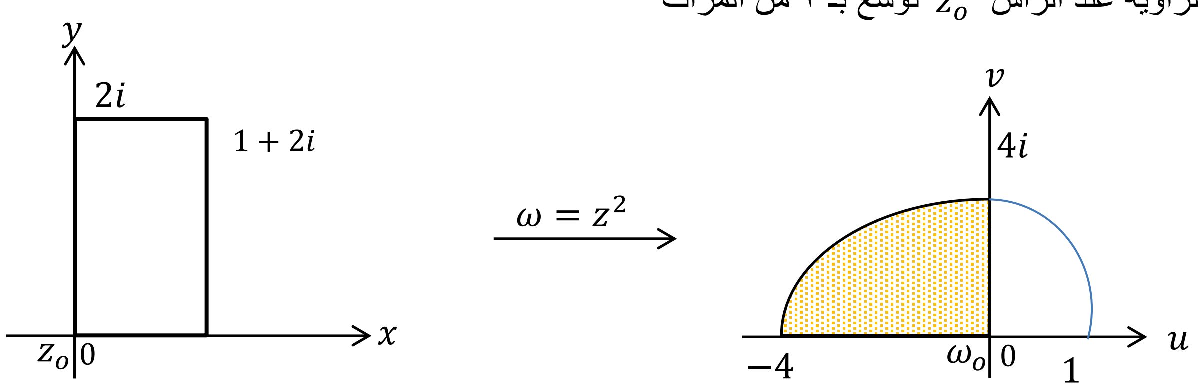
$$\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_2 = k(\beta_2 - \beta_1) = k\Delta\beta$$

وبهذا ينتهي البرهان وكما وضح في الشكل(٧-٢).



شكل(٧-٢).

مثال٢ . التطبيق $\omega = f(z) = z^2$ ينقل المربع $s = \{x + iy: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$ إلى نصف للمستوي العلوي $Im(\omega) > 0$ الذي يقع تحت القطع المكافئ $u = -4 + \frac{1}{16}v^2, u = 1 - \frac{1}{4}v^2$ كما في الشكل(٧-٣) لاحظ أن $f'(z) = 2z$ لذلك يكون تطبيقاً مقابلاً لكل $z \neq 0$ وعند النقطة $z_o = 0$ يكون لدينا $f'(0) = 0$ بينما $f''(0) \neq 0$ لذلك فإن الزاوية عند الرأس z_o توسع بـ ٢ من المرات



شكل(٧-٣)

(المحاضره : السابعة و الثلاثون)

التحويلات ثنائية الخطية Bilinear Transformations

التحويل $\omega = \frac{az+b}{cz+d}$ حيث $ad - bc \neq 0$ (1)

وأن a, b, c, d ثوابت عقدية يسمى **تحويلا ثنائي الخطية(موبيوس Mobius transformation)** ويمكن كتابه بالصيغة

$$Az\omega + Bz + C\omega + D = 0 \quad \text{حيث} \quad (AD - BC \neq 0)$$

وعندما $c = 0$ فإن الشرط $ad - bc \neq 0$ يصبح $ad \neq 0$ لذلك التحويل يؤدي إلى دالة خطية غير ثابتة وينقل الدائرة إلى دائرة والخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة أما عندما $c \neq 0$ فإن

$$(2) \qquad \omega = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

وبالتالي فإن الشرط يحول دون إمكانية ω تكون ثابتة ومن الممكن ملاحظة أن المعادلة (٢) هي تركيب دوال والتحويل $\omega = \frac{1}{z}$ حالة خاصة من التحويل (١) عند $c \neq 0$

وعند حل المعادلة (١) بالنسبة لـ z فإن

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

وعندما $z = \infty$ فإن صورتها تكون $\omega = \frac{a}{c}$ عندما $c \neq 0$ ونكتب التحويل كالآتي

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

لذلك عندما $c = 0$ فإن $T(\infty) = \infty$

عندما $c \neq 0$ فإن $T(\infty) = \frac{a}{c}\ ,\ T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$

مثال١ . جد التحويل الذي ينقل النقاط $z_1 = 1\,, z_2 = 0\,, z_3 = -1$ إلى النقاط $\omega_1 = \mathrm{i}\,, \omega_2 = 1\,, \omega_3 = -i$

الحل . بما ١ هو صورة ٠ فإنه من المعادلة (١) يكون لدينا

$$1 = \frac{b}{d},$$

لذلك

$$\omega = \frac{az+b}{cz+b} \quad (b(a-c) \neq 0)$$

وكذلك $-1,1$ تحولت إلى $-i, i$ على الترتيب

لذلك

$$ic - ib = -a + b$$
$$ic + ib = a + b$$

وعليه نستنتج بالجمع ان $c = -ib$

لذلك فإن

$$\omega = \frac{ibz+b}{-ibz+b} = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

نظرية (الصيغة الضمنية)An Implicit Form

يوجد تحويل ثنائي الخطية ويكون وحيداً ينقل ثلاث نقط مختلفة $z_1\,, z_2\,, z_3$ إلى ثلاث نقاط مختلفة $\omega_1\,, \omega_2\,, \omega_3$ على الترتيب والصيغة الضمنية تعطى بالصورة

$$\frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} = \frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_3} \cdot \frac{\omega_2-\omega_3}{\omega_2-\omega_1}$$

البرهان: يترك كتمرين للطالب

مثال٣ . جد دالة ثنائية الخطية تنقل النقاط الاتية $\mathrm{z}_1 = \mathrm{i}, \mathrm{z}_2 = 1+\mathrm{i}, \mathrm{z}_3 = 0$ الى $\mathrm{w}_1 = 1, \mathrm{w}_2 = 0, \mathrm{w}_3 = 1$

الحل.

$$\frac{(\omega-1)(0-1)}{(\omega-0)(0-1)} = \frac{(z-i)(1+i)}{(z+1)(1+i-i)}$$

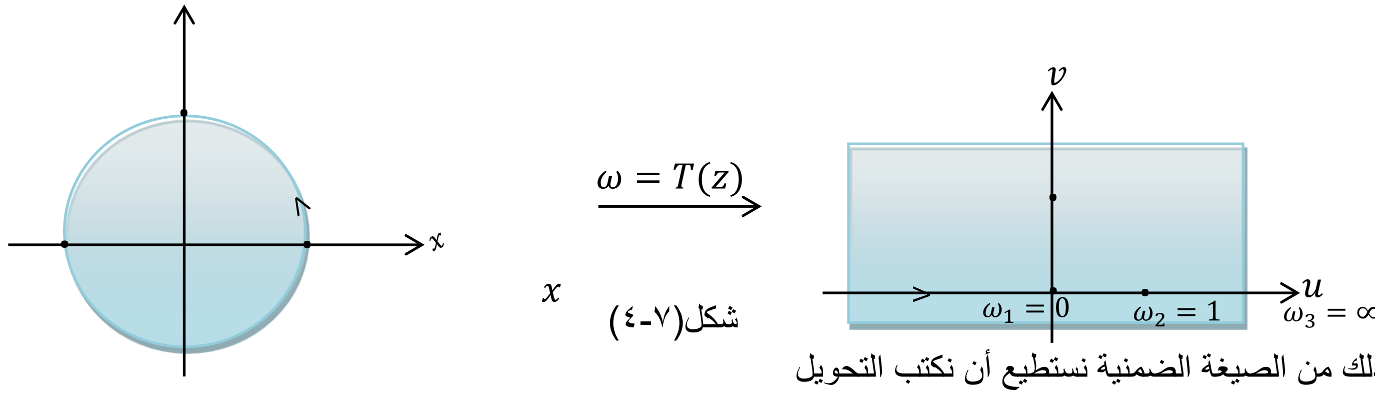
وبحل المعادلة بالنسبة للمتغير z فإن

$$\omega = \frac{z}{i(z-1)+1}$$

مثال٤ . جد التحويل ثنائي الخطية الذي ينقل الشكل داخل الدائرة $|z| < 2$ الى نصف المستوي العلوي إلى الشريط الأفقي.

الحل . دعنا نختار $z_1 = 2\,, z_2 = 2i\,, z_3 = -2$ وصور هذه القيم هي $\omega_1 = 0\,, \omega_2 = 1\,, \omega_3 = \infty$ على الترتيب وكما موضح في الشكل(٧-٤)

y



شكل(٧-٤)

لذلك من الصيغة الضمنية نستطيع أن نكتب التحويل

$$\frac{z-4}{z-0}\cdot\frac{2+2i}{2i-2}=\frac{\omega-0}{1-0}$$

وعليه يكون

$$\omega=\frac{-i(z-2)}{z+2}$$

الذي ينقل $|z|<2$ إلى المستوي العلوي $Im(\omega)>0$

مثال٥ . إثبت أن التحويل ثنائي $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$ ينقل نصف المستوي الأيمن $Rez>0$ إلى داخل القرص $|\omega|<1$

الحل . نجد z بدلالة ωالخطية حيث

$$\omega=\frac{z-1}{z+1}$$

لذلك فإن

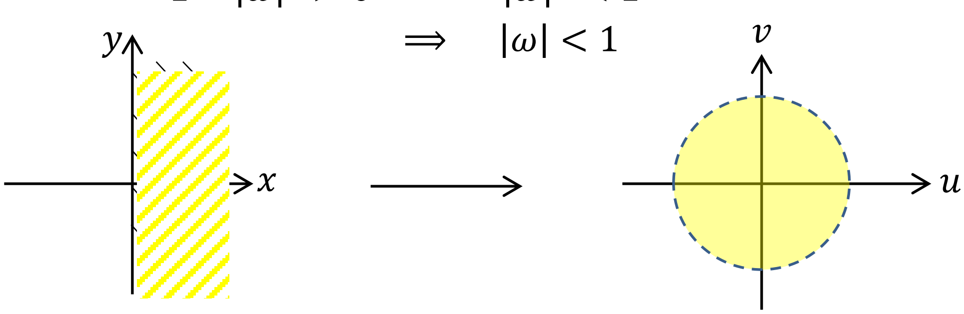
$$z=\frac{1+\omega}{1-\omega}$$

وعليه يكون

$$Rez=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\omega)(1-\overline{\omega})+(1+\overline{\omega})(1-\omega)}{|1-\omega|^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2(1-\omega\overline{\omega})}{|1-\omega|^2}\right]=\frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}$$

الآن بما أن

$$\frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}>0$$
$$1-|\omega|^2>0 \quad\Rightarrow\quad |\omega|^2<1$$
$$\Rightarrow\quad |\omega|<1$$



شكل(٧-٥)

مثال٦ . التحويل $f(z)=\frac{e^z-i}{e^z+i}$ ينقل الشريط $0<y<\pi$ إلى القرص المفتوح $|\omega|<1$.

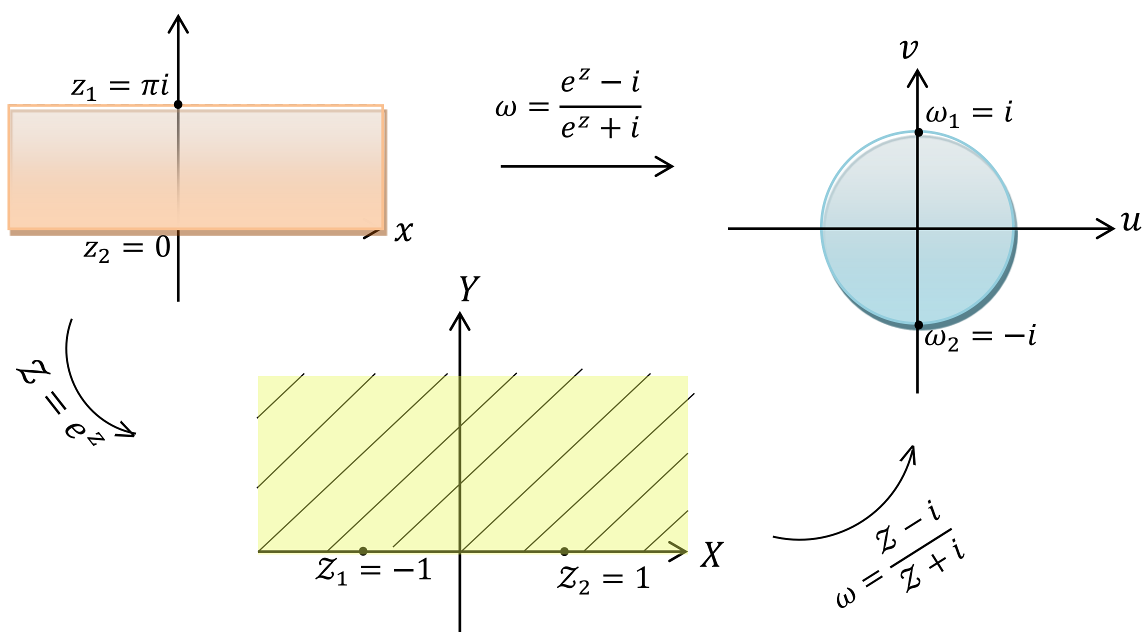
الحل . التحويل $f(z)=\omega=\frac{e^z-i}{e^z+i}$ يمكن اعتباره على شكل تركيب دالتين $\mathcal{Z}=e^z$ لذلك فإن

$$\omega=\frac{\mathcal{Z}-i}{\mathcal{Z}+i}$$

الشريط $0<y<\pi$ تحت تأثير التطبيق$\mathcal{Z}=e^z$ هو نصف المستوي العلوي $Im\ (\mathcal{Z})>0$ (الإحداثي x ينتقل إلى الإحداثي الموجب X والخط $y=\pi$ ينتقل إلى الإحداثي السالب X)

والآن التحويل $\omega=\frac{\mathcal{Z}-i}{\mathcal{Z}+i}$ ينقل نصف المستوي العلوي $Im\ (\mathcal{Z})>0$ إلى القرص $|\omega|<1$ (الإحداثي الموجب X ينتقل إلى أسفل شبه الدائرة والإحداثي السالب X ينتقل إلى أعلى شبه الدائرة) كما موضح بالشكل (٧-٦)

y



شكل (٧-٦)

مثال٧ . التحويل $\omega=Log\frac{z-i}{z+i}$ هو أيضاً عبارة عن تركيب دالتين هما

$$\mathcal{Z}=\frac{z-i}{z+i},\qquad \omega=Log\,\mathcal{Z}$$

ينقل هذا التحويل المستوي $Im\ (\mathcal{Z})>0$ إلى الشريط $0<v<\pi$.(لماذا؟).

(المحاضره: الثامنة و الثلاثون)

تحويل $\omega = \sin z$

لنبدأ بالتحويل $\omega = \sin z$ ولنأخذ المثال الآتي

مثال٨ . التحويل $f(z) = \sin z$ ينقل الشريط الرأسي $|x| < \frac{\pi}{2}$ إلى المستوي ωعدا الشعاع $v = 0, u \leq -1$ وكذلك $v = 0, u \geq 1$

الحل . بما أن $f'(z) = \cos z \neq 0$ لذلك لكل قيم zفإن $\frac{-\pi}{2} < Re\, z < \frac{\pi}{2}$ متحققة. وهذا يؤدي إلى أن $\omega = \sin z$ تطبيق مطابق،

الآن
$$u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \qquad (3)$$

فإذا كانت $|a| < \frac{\pi}{2}$ فإن صورة العمود $x = a$ هو منحني في المستوي ω ويعطى بالمعادلة الوسيطية التالية
$$u = \sin a \cosh y\,, \;\; v = \cos a \sinh y \qquad (4)$$

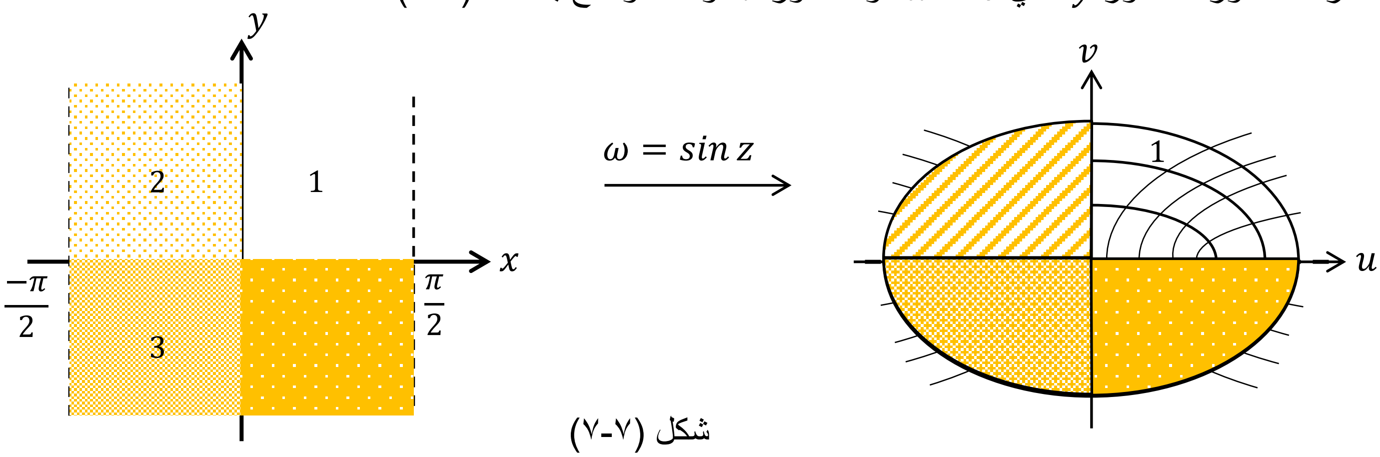
لكل قيم $-\infty < y < \infty$ ومن المعادلة (٤) فإن

$$\cosh y = \frac{u}{\sin a}\,, \qquad \sinh y = \frac{v}{\cos a}$$

ومن المعادلة
$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$
نجد أن

$$\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1$$

وهذه معادلة قطع زائد في المستوي ω بؤرته $(1,0), (-1,0)$ لذلك فإن العمود $x = a$ ينتقل إلى فرع القطع الزائد والذي يمر من النقطة $(\sin a\,, 0)$. إذا كانت $0 < a < \frac{\pi}{2}$ فإنه الفرع الأيمن واذا كانت $\frac{-\pi}{2} < a < 0$ فإن الفرع الأيسر للقطع الزائد. صورة المحور y الذي $x = 0$ هو المحور v وكما موضح بالشكل (٧-٧)



شكل (٧-٧)

صورة الشريط الأفقي $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y = b$ هو المنحني في المستوي ω الممثل بالمعادلة الوسيطية

$$u = \sin x \cosh b \quad \text{و} \quad v = \cos x \sinh b$$

لكل قيم x حيث $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ نستطيع كتابة المعادلة الآتية

$$\sin x = \frac{u}{\cosh b} \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{v}{\sinh b}$$

وباستخدام $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نستنتج أن

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص في ω يمرخلال النقاط $(\cosh b\,, 0), (-\cosh b\,, 0)$و$(0, -\sinh b), (0, \sinh b)$ وبؤرتيه $(\mp 1,0)$ لذلك إذا كانت $b > 0$ فإن $v = \cos x \sinh b > 0$ وصورةالخط الأفقي هوجزءالقطع الناقص في المعادلة أعلاه الذي يقع في المستوي $Im\,(\omega) > 0$ وإذا كان $b < 0$ يقع في المستوي $Im\,(\omega) < 0$.

التحويل $\omega = f(z) = \sin^{-1} z$

هذا التحويل مفيد جداً وخصوصاً في التطبيقات الفيزياوية الذي يستخدم لحل الكثير من المسائل التي تتعلق بدرجات الحرارة الساكنة وحركة الموائع والتي سندرسها لاحقاً.

الآن لتكن
$$x + iy = \sin \omega = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v$$
حيث
$$v = v(x, y), u = u(x, y)$$

لذلك نستنتج أن

$$\cosh v = \frac{x}{\sin u} \quad , \sinh v = \frac{y}{\cos u}$$

ومن المعادلة

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$$

نستنتج أن

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$$

وهذه معادلة قطع زائد بعد اعتبار أن u ثابت في المستوي (x,y) بؤرته $(\mp 1,0)$، ورأسه $2\sin u$ لذلك فإن

$$2\sin u = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن

$$(5) \qquad u = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}\right)$$

لذلك تكون $\frac{-\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

وبنفس الأسلوب نستطيع أن نجد

$$2\cosh v = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

لذلك فإن

$$v = (\text{إشارة } y)\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}\right)$$

حيث إشارة y تكون سالبة إذا كانت $y < 0$ وموجبة إذا كانت $y \geq 0$.

لذلك فإن التطبيق $\sin^{-1} z$ هو تطبيق مطابق ومتباين ينقل المستوي z باستثناء $(y = 0, x \leq -1)$ و $(y = 0, x \geq 1)$ إلى الشريط العمودي $\frac{-\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ في المستوي ω.

نظرية (نظرية ريمان للرواسم) Riemann Mapping Theorem

إذا كان المجال D مجال بسيط متصل في المستوي العقدي فإنه يوجد دالة تحليلية وحيدة ومتباينة تنقل المجال D الى قرص الوحدة $|w| < 1$ بحيث انه اذا كانت $z_0 \in D$ فان $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$

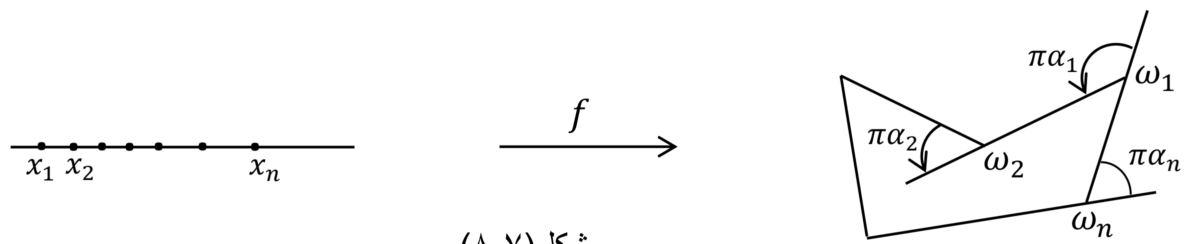
تحويل شوارز- كريستوفل The Schwaz-Christoffel Transformation

هذا التحويل هو محل دراستنا هنا حيث يقوم هذا التحويل بنقل المحور الحقيقي ونصف المستوي العلوي للمستوي z إلى مضلع مغلق بسيط معطى وبداخله أيضاً في المستوي ω وتطبيقاته هي حلول بعض المسائل في تدفق السوائل والكهربائية التي تعتبر من المسائل الفيزياوية المهمة.

وهذا التحويل يعطى بالصيغة الاتية

$$f(z) = A + B\int_0^z (s-x_1)^{\alpha_1}(s-x_2)^{\alpha_2}\dots(s-x_n)^{\alpha_n}ds$$

حيث $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ وأن $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ هي الزوايا الخارجية للضلع المكون m من الأضلاع وA, B أعداد معقدة $\pi\alpha_k$ هي الزاوية الخارجية عند الرأس ω_k للمضلع وهي المطلوب إيجادها التي تجعل المتجه ω_k إلى ω_{k+1} ينطبق مع إتجاه المتجه ω_{k-1} إلى ω_k وكما في الشكل(٧-٨)



شكل(٧-٨)

نلاحظ أن $-1 < \alpha_k < 1$ حيث $\alpha_k > 0$ عندما يكون الدوران عكس عقرب الساعة وأن $\alpha_k < 0$ بالإتجاه الآخر وعند الدوران حول محيط المضلع نحصل على

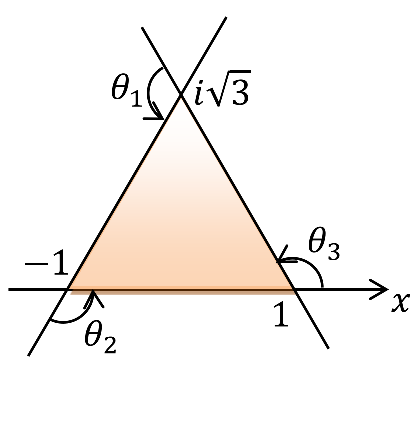
$$\pi\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = -2\pi \quad \text{أو} \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = -2$$

وبدورة كاملة، أما الثابتين A, B فيمكن التحكم بهما بالإنسحاب ، والتكبير والدوران والمقياس واتجاه المضلع في المستوي ω وان النقاط x_k تحول إلى ω_k للمضلع . هذا فيما يخص صيغة سوارز- كريستوفل على المحور الحقيقي.

التحويل الكسري الخفي لنصف المستوي العلوي إلى نفسه بنقل ثلاث نقاط من x_k إلى ثلاث نقاط على المحور الحقيقي وهذا يعطينا حرية اختيار النقاط بالإعتماد على المضلع للحصول على صورة كاملة لحل التكامل وهذه الحالة عندما يكون المضلع منتظما. وفي كثير من الأحيان نختار $x_n = \infty$ لحذف الحدود المحتوية على x_n في هذه الصيغة.

مثال٧ . جد تحويل سوارز- كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي الى المنطقة الداخلية للمثلث الذي رؤوسه $-1, 1, i\sqrt{3}$

الحل . من الشكل (٧-٩) فإن الزوايا الخارجية للمثلث هي $\frac{2\pi}{3}$ لأن المثلث متساوي الأضلاع



شكل (٧-٩)

كذلك $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{2\pi}{3}$

نختار قيم مناسبة بحيث تكون $f(\infty) = i\sqrt{3}\,, f(1) = 1\,, f(-1) = -1$
لذلك فإن

$$\omega = f(z) = B\int_0^z (s - x_1)^{\frac{-\theta_1}{\pi}}(s - x_2)^{\frac{-\theta_2}{\pi}} ds + A$$

$$= B\int_0^z (s + 1)^{\frac{-2}{3}}(s - 1)^{\frac{-2}{3}} ds + A$$

بما أن $\omega = f(1) = 1\,,\ \omega = f(-1) = -1$ لذلك فإن

$$-1 = B\int_0^{-1} \frac{1}{(s^2 - 1)^{2/3}} ds + A$$

$$1 = B\int_0^{1} \frac{1}{(s^2 - 1)^{2/3}} ds + A$$

فإذا فرضنا أن

$$\alpha = \int_0^{-1} \frac{1}{(s^2 - 1)^{2/3}} ds$$

$$\beta = \int_0^{1} \frac{1}{(s^2 - 1)^{2/3}} ds$$

فإن

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{\alpha - \beta}$$

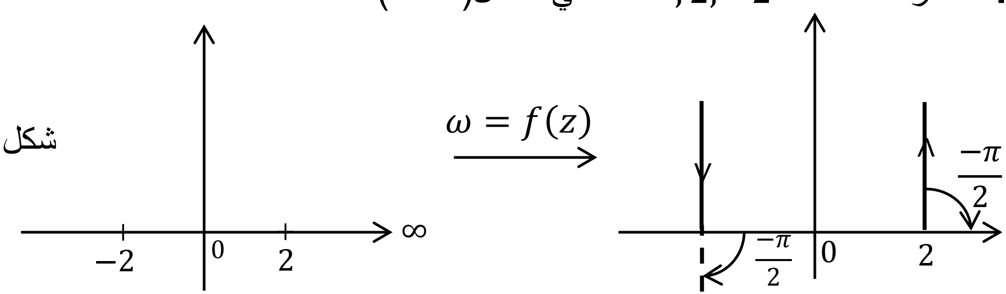
$$A = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

ويمكن إيجاد القيم α, β من استخدام الجداول في التكاملات في موضوع التفاضل والتكامل

مثال٨ . حول نصف المستوي العلوي إلى المنطقة $y > 0\,, |x| < 2$.

الحل . نختار ثلاث نقاط $\infty, 2, -2$ كما في الشكل(٧-١٠)

شكل (٧-١٠)



باستخدام صيغة شوارز- كريستوفيل نحصل على

$$\omega = A + B\int_{0}^{z}(s+1)^{\frac{-1}{2}}(s-1)^{\frac{-1}{2}}ds = A + B\int_{o}^{z}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$$

$$= A + \frac{B}{i}\int_{o}^{z}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = A + \frac{B}{i}sin^{-1}z$$

وبما أن $\omega(-2) = -2\,,\omega(2) = 2$ فإن

$$A - \frac{iB\pi}{2} = 2$$

$$A + \frac{iB\pi}{2} = -2$$

إذن $A = 0\,,\ B = \frac{4i}{\pi}$ وهكذا تصبح $\omega = \frac{4}{\pi}\,sin^{-1}z$

(المحاضره : التاسعة و الثلاثون)

تطبيقات فيزياوية

سنعرض هنا بعض التطبيقات الفيزيائية للدوال المطابقة من ناحية رياضية وذلك لكي يتعرف الطالب على أهمية دراسة هذه المواضيع وهذا ما نصبو إليه من خلال هذا العرض ويمكن للطالب أن يطلع على الكثير من التطبيقات الموجودة في مراجع كثيرة التي تعطي للموضوع وصفاً دقيقاً وتعالج الكثير من المسائل في الفيزياء والهندسة.

أ- التدفق الحراري Heat Flow

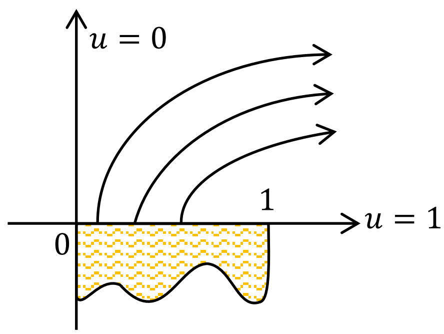
نفرض أن الحرارة تتدفق خلال جسم صلب متجانس ذا بعدين وفي حالة إتزان . ولتكن D منطقة بسيطة الإتصال التي لا تحتوي على تصريف حراري فإن متجه التدفق الحراري $T(z)$ هو دالة مستمرة معقدة ولتكن c منحني مغلق وأملس

داخل D فإن التدفق الحراري إلى خارج المنطقة يعطى بالصيغة $\int_c F_n ds = 0$ لذلك حسب نظرية موريرا فإن F دالة تحليلية داخل D لذلك

$$F(z) = -k\ grad\ u(z) = -k\ grad\ u \qquad (6)$$

حيث $grad\ u(z) = u_x + iu_y$ وبفرض أن درجة الحرارة u لاتعتمد على الزمن فإن معادلة (٦)تسمى قانون فوريه وهذا بطبيعة الحال يؤول إلى أن يكون التدفق الحراري عمودياً على المنحنيات $u(z) = b$ حيث b عدد ثابت ودرجات الحرارة تكون متساوية على نقاط هذه الخطوط المستقيمة ولهذا $v(z)$ منحنيات تدفق درجات الحرارة المتساوية تكون ثابتة.

مثال٩ . أوجد v التي تمثل منحنيات تساوي الحرارة للشريحة المظللة و u درجات الحرارة وكما في الشكل(٧-١١)



شكل(٧-١١)

الحل . لنبحث عن التطبيق الملائم لذلك نجد أن $\omega = \frac{2}{\pi}\ sin^{-1} z$ تنقل الشريحة المظللة إلى $v > 0, 0 < u < 1$ وهي تمثل الجهد الكهربائي

$$z = sin\frac{\pi}{2}\omega = sin\frac{\pi}{2}u\ cosh\frac{\pi}{2}v + icos\ \frac{\pi}{2}u\ sinh\frac{\pi}{2}v$$

وبذلك نجد أن

$$\frac{x^2}{sin^2\frac{\pi}{2}u} - \frac{y^2}{cos^2\frac{\pi}{2}u} = 1$$

ولذلك فإن v خطوط تساوي الحرارة قطوع زائدة.

ب- الكهربائية الساكنة Electrostatic

لتكن D منطقة بسيطة الإتصال وتكون مكملة للحقل $F(z)$ الذي ينشأ من التجاذب والتنافر لنظام من الشحنات الإختياري.
ليكن c منحني مغلق أملس داخل D لا يحتوي على شحنات لذلك

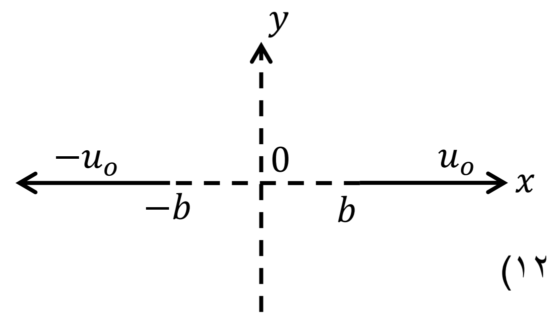
$$\int_c F_n ds = 0$$

حيث F يسمى جهد الحقل وأن الدالة الأصلية لها هي $i\omega = -v + iv$ وهي الجهد العقدي (المركب) للحقل و$-v$ دالة القوى و u دالة الجهد ومن معادلتي كوشي ريمان فإن

$$F = -(u_x + iu_y) - grad\ u$$

وأن $u(z) = constant\ , v(z) = constant$ هي خطوط القوى وتساوي الجهد على الترتيب.

مثال١٠ . أوجد خطوط تساوي الجهد للحقل المكون من مكثف لوحين لهما صورتا أنصاف مستويات تقع في مستو واحد وحوافه المتوازية متباعدة بمسافة $2b$ وفرق جهد $2u_o$ وأن أي مقطع عمودي على المستويات يعطي حقل مستوي له قطعان كما في الشكل(٧-١٢)



شكل(٧-١٢)

الحل . التحويل $\omega = \frac{2u_o}{\pi} sin^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)$ يصور النطاق فوق $|u| < u_o$ وعليه تكون خطوط تساوي الجهد هي القطوع الزائدة

$$\frac{x^2}{b^2 sin^2 \frac{\pi u}{2u_o}} - \frac{y^2}{b^2 cos^2 \frac{\pi u}{2u_o}} = 1$$

ج- حركة الموائع Fluid Flow

نفرض أن سرعة إنسياب سائل معين على المستوي المركب عند النقطة $z = x + iy$ هي

$$F(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$$

وكما ملاحظ أنه من خلال انسياب أي سائل فهل هو متساوي الإستمرارية وهل الإنسياب دوراني لذلك فإذا كان متساوي الإستمرارية والذي يحقق

$$P_x + iQ_x = 0 \qquad (7)$$

وغير دوراني والذي يحقق

$$Q_x - P_y = 0 \qquad (8)$$

ومن المعادلتين أعلاه (٧)،(٨) نستنتج أن $f(z) = P + iQ$ تحليلية فإذا كانت أصل المشتقة للدالة $f(z)$ هي $h(z)$ فإنه

$$h(z) = M(x,y) + iN(x,y)$$

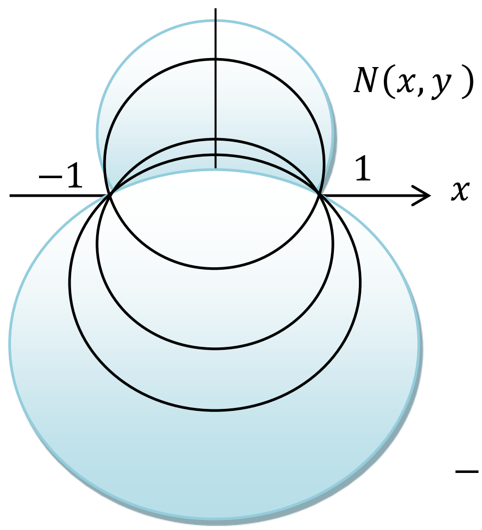
ويمكن إثبات أن $M(x,y)$ تمثل دالة الجهد وعليه يكون $M(x,y)$ كمية ثابت تعطي خطوط تساوي الجهد وكـــــذلك $N(x,y)$ كمية ثابتة تعطي خطوط التيار للسائل ومن المعروف أيضاً لدينا أن الحقل المغناطيسي يتميز بنقطة إنطـــلاق وهي القطب الموجب ونقطة اللقاء هي القطب السالب لذلك يمكن أن تتكون أثناء حركة السائل ضمن شروط فيزيائية محددة نقطة التقاء ونقطة إنطلاق.

مثال١١ . $f(z) = log\frac{z-1}{z+1}$ تحويل مطابق باستثناء $z = -1, 1$ لذلك أولا نجد $M(x,y)$ التي تمثل الجزء الحقيقي لتكن

ودالة التيار $N(x,y)$ التي تمثل الجزء الخيالي وعليه

$$N(x,y) = Im\, f = arg\frac{z-1}{z+1}$$

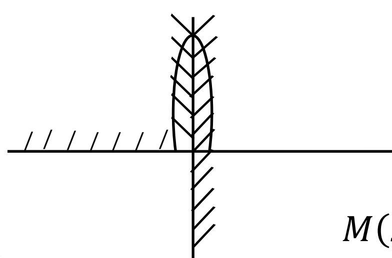
وبفرضها كمية ثابتة وتساوي a فإن خطوط التيار تمثل بالشكل الآتي



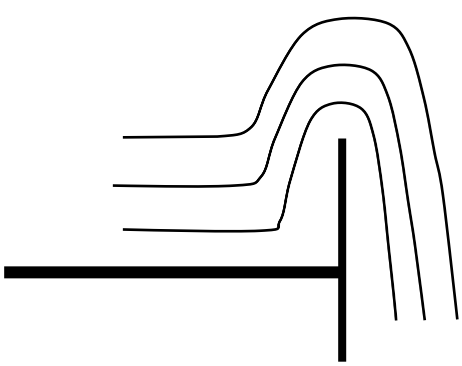
وهي دوائر مركزها عند المحورر y وتمر بالنقطتين $-1,1$

مثال١٢ . التحويل المطابق $f(z) = -\frac{1}{z}iz^{\frac{1}{2}}(z-3)$ ينقل المستوي z إلى الشكل(٧-١٣)

شكل(٧-١٣)

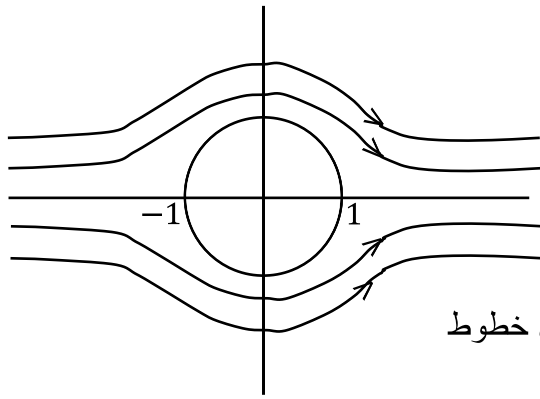


فتتكون منحنيات المستوي للتطبيق $M(x,y) = A\, Re\, f(z)$
التي ممكن ايجادها من خلال دراستنا السابقة فإن هذه المنحنيات تمثل إنسياب سائل يواجه سداً كما في الشكل(٧-١٤)



لشكل(٧-١٤)

وإذا كان مايعيق السائل كرة فإنه يمثل بالشكل عند فرض إتجاه الحركة بالإتجاه الموجب للمحور x



وجميعها لديها معادلات توافقية تمثل خطوط الإنسياب.

شكل (٧-١٥)

Homework

١- بين اين تكون الدالة الاتية مطابقة

أ- $f(z) = \sin z$

٢- جد صورة المستقيم $x = a$ و $y = b$ حيث $a \neq 0, b \neq 0$ تحت تاثير التطبيقات الاتية
ا- $f(z) = z^2$ ب- $f(z) = e^z$

٣- جد صورة قطعة المستقيم $\frac{\pi}{2} > x > \frac{-\pi}{2}$، $y = 0$ والمستقيم العمودي $x = a$ حيث $|a| < \frac{\pi}{2}$ تحت تاثير التطبيق $f(z) = \sin z$.

٤- جد صورة المستوي $Re\ z > 0$ تحت تأثير التطبيق $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$.

٥- جد صورة الشريط الافقي $0 < y < 2$ تحت تأثير التطبيق $w = \frac{z}{z-i}$.

٦- جد تحويل شوارز-كريستوفل الذي ينقل نصف المستوي العلوي الى المنطقة $D = \{0 < Im\ z < 1$.

٧- اذا كانت دالة توزيع الجهد الكهربائي المعرفة بالمعادلة $\emptyset(x, y) = A\ \mathrm{Re}\ f(z)$ حيث A ثابت يعتمد على الشروط $\emptyset(x, y) = 0, \emptyset(x, y) = 1$.جد $f(z)$ ثم جد $\emptyset(x, y)$